VERSO L'ESAME
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Problemi

1 **Considera l'equazione nell'incognita x:**

$$x^2 - 2(k+1)x - (k+3) = 0$$

Verifica che essa ammette due soluzioni reali distinte per ogni $k \in \mathbf{R}$. Determina, se esistono, i valori di k per cui:

a. le soluzioni sono entrambe positive;

b. la somma dei quadrati delle soluzioni è maggiore o uguale a 3;

c. il valore assoluto della somma delle soluzioni è maggiore del valore assoluto del prodotto delle soluzioni;

d. le due soluzioni sono non nulle e concordi e la radice quadrata del loro prodotto è minore di $-\frac{k}{4}$;

e. la differenza, in valore assoluto, delle due soluzioni è maggiore di $4 - k$.

2 Supponi che $\sqrt{k+3}$ e $\sqrt{3k-3}$, con $k > 1$, siano le misure dei lati di un rettangolo. Determina, se esistono, i valori di k per cui:

a. il rettangolo diventa un quadrato;

b. l'area è minore di $\sqrt{63}$;

c. il perimetro è maggiore di 8;

d. la misura del raggio della circonferenza circoscritta è minore di 10;

e. il raggio della circonferenza inscritta in uno dei due triangoli in cui il rettangolo resta diviso da una diagonale ha misura uguale a un quarto della misura della diagonale stessa.

Quesiti

3 Dimostra che $|x^5 - x^2 + x - 1| \leq |x|^5 + x^2 - x + 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

4 Determina per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $x^2 - 2x + |a| - 1 = 0$ **non** ammette soluzioni reali.

5 Elevando a una potenza di esponente *dispari* entrambi i membri di una disequazione si ottiene sempre una disequazione equivalente? Ed elevandoli a una potenza di esponente *pari*? Se le risposte sono affermative, giustificale, altrimenti fornisci un controesempio.

6 Risolvi la disequazione:

$$\frac{|x-1| + \sqrt{|x^3 - x|}}{|x^2 - x| - 4x} \geq 0$$

7 Per quali valori di x i tre numeri $2x+2$, $x+4$ e $10-x$ rappresentano le misure dei lati di un triangolo il cui perimetro è maggiore di 20?

8 Stabilisci se le seguenti disequazioni sono equivalenti:

a. $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} < 1$ **b.** $\sqrt{x^2-1} < 1$

9 Supponi che la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ sia soddisfatta per ogni $x \in \mathbf{R}$. In tale ipotesi, può essere soddisfatta una sola delle seguenti condizioni; individua quale, dandone una esauriente spiegazione.

A $a > 0 \wedge \Delta > 0$
B $a < 0 \wedge \Delta < 0$
C $a > 0 \wedge \Delta < 0$
D $a < 0 \wedge \Delta = 0$

10 Sia x un numero non negativo. Sottraendo 3 dal doppio di x si ottiene un numero minore della radice quadrata di x. Quali valori può assumere x?

11 Per ciascuna delle seguenti affermazioni, stabilisci se è vera o falsa. Se l'affermazione è vera, motivala, altrimenti fornisci un controesempio.

a. Il valore assoluto di una somma è uguale alla somma dei valori assoluti degli addendi.

b. $|2x - 2x^2 - 1| = 2x^2 - 2x + 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

c. Il valore assoluto di un prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti dei fattori.

d. Due numeri hanno lo stesso valore assoluto se e solo se sono uguali.

12 Esponi lo schema risolutivo della disequazione $|A(x)| \leq k$, al variare di $k \in \mathbf{R}$. Fornisci poi l'esempio di una disequazione di questo tipo che abbia come insieme delle soluzioni:

a. l'insieme vuoto

b. l'insieme $\{0\}$

c. l'intervallo $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
LE FUNZIONI

Problemi

1 **Considera la funzione definita da:**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3ax + 2}$$

a. Determina per quali valori di a il suo dominio è $\mathbf{R}$.
b. Determina per quale valore di a risulta $f(1) = 3^{-1}$.

In corrispondenza del valore di a trovato nel punto precedente:

c. determina le controimmagini di 4^{-1} nella funzione f;
d. determina l'immagine della funzione;
e. risolvi la disequazione $(f \circ f)(x) \geq \frac{9}{19}$.

2 Considera le funzioni:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \text{ e } g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determina:

a. il dominio di ciascuna funzione;
b. le controimmagini di 1 nella f e nella g;
c. quale delle due funzioni è invertibile e l'espressione analitica della funzione inversa;
d. l'espressione analitica di $g \circ f$;
e. l'insieme delle soluzioni della disequazione $f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2} g(|x|)$.

Quesiti

3 Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{27 - x^3} + \sqrt{(x^2 - 4)^3}}{x^2 + x + 1}$$

Determina poi, se esistono, gli zeri della funzione.

4 Verifica che la funzione $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$, con $x \geq 0$, è invertibile e determina l'espressione analitica della funzione inversa.

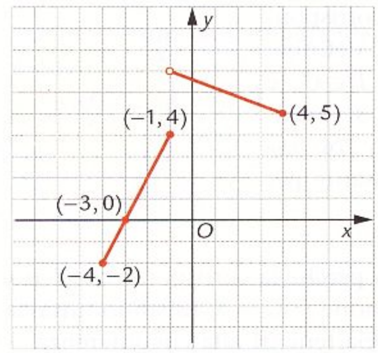
5 Date le funzioni $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ e $h(x) = x^3$, verifica che $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

6 Data la funzione $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$, determina a e b sapendo che $f(0) = 2$ e $f(1) = -1$.

7 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$, determina il dominio della funzione f e della funzione $f \circ f$.

8 In riferimento alla funzione il cui grafico è tracciato in figura, determina:

a. il dominio e l'immagine;
b. se è invertibile e, in caso affermativo, il grafico dell'inversa;
c. gli eventuali zeri;
d. il più ampio intervallo dove è strettamente crescente e il più ampio intervallo dove è strettamente decrescente.



9 Traccia il grafico di una funzione che soddisfi le seguenti caratteristiche:

a. abbia come dominio l'intervallo $[-5, 4]$;
b. abbia come immagine l'intervallo $[-3, 6]$;
c. sia strettamente crescente nell'intervallo $[-5, -2]$ e strettamente decrescente nell'intervallo $[-2, 4]$;
d. abbia esattamente due zeri.

10 Un trapezio isoscele non degenere $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB, il cui raggio misura 1. Esprimi, in funzione della misura x dei lati obliqui del trapezio, il perimetro del trapezio stesso. Qual è il dominio della funzione così scaturita, in relazione al problema geometrico?

11 Definisci quando due funzioni si dicono *uguali*.

a. Le funzioni $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ e $g(x) = x - 1$ sono uguali?
b. Le funzioni $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ e $g(x) = x^2 - 1$ sono uguali?

Giustifica le tue risposte.

12 Quanti zeri può avere una funzione *strettamente crescente* nell'insieme dove è definita? Giustifica la tua risposta e fornisci degli esempi.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
IL PIANO CARTESIANO E LE FUNZIONI LINEARI

Problemi

1 Considera nel piano cartesiano i tre punti:

$A(-2,\ 0),\ B(1,\ -3),\ C(a+2,\ a)$

a. Determina per quale valore di a il baricentro del triangolo ABC ha ascissa uguale a 1.

b. In corrispondenza del valore di a trovato al punto precedente, determina il punto D dell'asse y che forma con A e C un triangolo ACD, isoscele sulla base AC.

c. Calcola il perimetro e l'area del quadrilatero $ABCD$.

d. Dimostra che il quadrilatero $PQRS$, avente come vertici rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD e AD del quadrilatero $ABCD$, è un parallelogramma e calcola il suo perimetro e la sua area.

2 Considera le funzioni:

$y = f(x) = |x-3| + |x-1|; \quad y = g(x) = 7 - |x-1|$

a. Traccia i loro grafici, specificando per ciascuna funzione il dominio e l'immagine.

b. Determina le coordinate dei punti di intersezione A e B (con $x_A < x_B$) dei loro grafici.

c. Determina l'area del pentagono individuato dal grafico di f e dal grafico di g.

d. Determina un punto P, sull'asse y, in modo che il triangolo APB sia isoscele sulla base AB.

e. Determina per quali valori di k le due equazioni $f(x) = k$ e $g(x) = k$ hanno *entrambe* almeno una soluzione reale.

Quesiti

3 Verifica che il triangolo di vertici $A(-3,\ -\sqrt{3})$, $B(3,\ -\sqrt{3})$ e $C(0,\ 2\sqrt{3})$ è equilatero. Determina il raggio r della circonferenza inscritta e quello R della circonferenza circoscritta al triangolo.

4 Risolvi graficamente la disequazione:

$$|x| + |x-2| \geq |x-3|$$

5 Un parallelogramma $ABCD$ ha due vertici in $A(-3,\ 3)$, $B(0,\ -2)$. Sapendo che il centro del parallelogramma è il punto $P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$, determina le coordinate di C e D.

6 Determina, se esiste, un punto P sull'asse x tale che $\overline{PB} = 2\,\overline{PA}$, essendo $A(-2,\ 0)$ e $B(0,\ 4)$.

7 Fornisci l'esempio di una funzione avente come dominio $\mathbf{R}\setminus\{2\}$ e come immagine $\{\pm 3\}$.

8 Verifica che, per ogni $k \in \mathbf{R}$, il punto P di coordinate $(-k^2+k-1;\ k^2-4k+5)$ appartiene al secondo quadrante.

9 Determina per quali valori di k il grafico della funzione $y = (k^2-4k)x + 2k - 1$ forma con l'asse x un angolo ottuso e interseca l'asse y in un punto di ordinata positiva.

10 Traccia il grafico delle due funzioni definite da:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \text{ e } g(x) = \sqrt{x^2-2x+1}$$

Per ciascuna di esse specifica il dominio e l'immagine.

11 Data la funzione lineare, di equazione $y = mx + q$, illustra sotto quali condizioni essa:

a. è strettamente crescente;
b. è una funzione dispari;
c. è invertibile.

12 Verifica che non esiste alcun valore reale di a per cui il triangolo di vertici $A(a,\ a-1)$, $B(-a,\ a+1)$, $C(a-1,\ a)$ sia rettangolo di ipotenusa AC.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Problemi

1 Un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è tale che la base misura 12 e i lati obliqui misurano 10. Riferito il triangolo a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali:

a. determina le coordinate dei vertici;

b. determina le coordinate del baricentro, dell'ortocentro, del circocentro e dell'incentro;

c. verifica che la distanza tra baricentro e ortocentro è il doppio della distanza tra baricentro e circocentro;

d. determina una rappresentazione analitica dei punti interni al triangolo ABC e stabilisci per quali valori di a il punto $P(3a, a-1)$ è interno al triangolo.

2 Considera il fascio di rette di equazione:

$$x+(k+1)y-1-3k=0$$

Determina:

a. il centro e le generatrici del fascio;

b. la retta del fascio parallela alla retta di equazione $2x-3y+2=0$;

c. la retta del fascio perpendicolare alla generatrice avente coefficiente angolare negativo;

d. le rette del fascio che distano 2 dall'origine;

e. le rette del fascio che formano con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{1}{2}$.

f. per quali valori di k le rette del fascio intersecano il segmento OA, essendo O l'origine e $A(3, 3)$.

Stabilisci infine per quale valore di a la retta di equazione $ax+2y-a-1=0$ appartiene al fascio.

Quesiti

3 Dimostra che la distanza tra due rette parallele di equazioni $y=mx+q$ e $y=mx+q'$ è data dalla formula $\frac{|q-q'|}{\sqrt{1+m^2}}$.

4 Nel fascio generato dalle rette di equazioni $x-y=0$ e $y+1=0$, determina la retta che forma con l'asse x un angolo di 120°.

5 Esponi i procedimenti che conosci per determinare l'equazione dell'asse di un segmento, date le coordinate dei suoi estremi. Applica entrambi i procedimenti per determinare l'asse del segmento AB, di estremi $A(-2, -2)$ e $B(2, -1)$.

6 Determina per quali valori di a la distanza del punto $P(-1, 2)$ dalla retta r di equazione $x+y-a=0$ è maggiore della distanza di P dalla retta s di equazione $2x+2y-a=0$.

7 Dimostra che due rette aventi coefficienti angolari m ed m' sono parallele se e solo se $m=m'$.

8 Data la retta r di equazione $y=2x$, determina il punto P del terzo quadrante, appartenente a r, tale che $\overline{PH}+\sqrt{5}\,\overline{PK}=25$, essendo H e K le proiezioni di P, rispettivamente, sull'asse x e sulla retta di equazione $y=\frac{1}{2}x$.

9 Determina k in modo che i punti $A(k, k-1)$, $B(2, -3)$ e $C(4, 5)$ siano allineati.

10 Considera il sistema $\begin{cases} \frac{3}{2}|x| \le y \\ y \le 3 \\ y \ge x+5 \end{cases}$

Da che cosa è rappresentato nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni del sistema?

A Nessun punto
B Un punto
C Una retta
D Un triangolo, esclusa la frontiera del triangolo

Motiva adeguatamente la risposta.

11 Un rombo $ABCD$ è tale che $A \equiv O$, essendo O l'origine del sistema di riferimento, e $C(4, 6)$. Sapendo che la diagonale AC è il doppio della diagonale BD, determina le coordinate di B e D (con $x_B > x_D$).

12 Dimostra analiticamente che gli assi dei lati di un triangolo hanno sempre un punto in comune, il circocentro del triangolo.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
LA CIRCONFERENZA

Problemi

1 Considera la retta r di equazione $y = -x + 1$ e scrivi l'equazione del fascio di circonferenze tangenti alla retta r nel punto A in cui r interseca l'asse y.

a. Scrivi l'equazione della circonferenza γ_1 del fascio avente il centro sulla retta di equazione $x = -1$.
b. Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 del fascio passante per il punto di coordinate $(2, 1)$.
c. Verifica che γ_1 e γ_2 sono simmetriche rispetto al punto $P(0, 1)$.
d. Detti C_1 e C_2, rispettivamente, i centri di γ_1 e γ_2, determina un punto P appartenente all'asse radicale di γ_1 e γ_2, che forma con C_1 e con C_2 un triangolo di area 7.
e. Determina le equazioni delle tangenti comuni alle due circonferenze diverse dalla retta r.
f. Detta t la tangente comune che ha ordinata all'origine negativa, calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle due circonferenze γ_1 e γ_2 e dalla retta t.

2 Considera la funzione

$$y = f(x) = 2 - \sqrt{8 + 2x - x^2}$$

a. Traccia il suo grafico, specificandone dominio e immagine.
b. Utilizzando il grafico tracciato al punto precedente, risolvi la disequazione:

$$2 - \sqrt{8 + 2x - x^2} \geq 4 - |x|$$

c. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel suo punto di intersezione con l'asse y.
d. Mediante opportune trasformazioni geometriche, deduci, a partire dal grafico di $y = f(x)$, il grafico di:

$$y = |f(2 - x)| + 1$$

specificando il dominio e l'immagine di quest'ultima funzione.
e. Determina il dominio della funzione $f \circ f$.

Quesiti

3 Determina la retta dei centri e l'asse radicale del fascio generato dalle circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$$

4 Considera un rombo in cui il lato misura 5 e la diagonale minore misura 6. Riferisci il rombo a un opportuno sistema di riferimento e scrivi l'equazione della circonferenza inscritta.

5 Dato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2kx - 2(k - 1)y - 4 = 0$, determina le generatrici e i punti base e specifica le caratteristiche delle circonferenze del fascio. La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 3 = 0$ appartiene al fascio?

6 Determina il punto appartenente alla circonferenza avente centro nell'origine e raggio 2 più vicino alla retta di equazione $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

7 Scrivi le equazioni delle circonferenze aventi il centro sulla retta di equazione $y = 3$, che passano per l'origine e individuano sull'asse x una corda di misura 4.

8 Chiarisci quanti punti base può avere un fascio di circonferenze e illustra le caratteristiche del fascio al variare del numero dei punti base. Fornisci l'esempio di un fascio privo di punti base.

9 Sia γ la semicirconferenza avente centro nell'origine e raggio 5 e t la retta tangente alla semicirconferenza parallela all'asse x. Considera un punto P appartenente a γ, di ascissa x, e indica con y la distanza di P dalla retta t. Esprimi y in funzione di x e traccia il grafico della funzione ottenuta.

10 Verifica che, per ogni $k \in \mathbf{R}$, il punto

$$P(k^2 - 1, k^2 + 1)$$

è sempre esterno alla circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

11 Determina l'area della regione di piano che hanno in comune il cerchio limitato dalla circonferenza tangente nell'origine all'asse x e avente il centro sulla retta di equazione $y = 3$ e il cerchio simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

12 Considera due circonferenze congruenti, tangenti esternamente in T, aventi centri C e C'. Sia TA una corda appartenente alla circonferenza di centro C e TB la corda perpendicolare a TA appartenente alla circonferenza di centro C'. Dimostra, geometricamente o analiticamente, che $AB \parallel CC'$ e $AB \cong CC'$.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
LA PARABOLA

Problemi

1 a. Scrivi l'equazione della parabola γ che ha vertice in $V(0,\ 4)$ e passa per il punto $P(2,\ 1)$.

b. Scrivi l'equazione della parabola γ', simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = 1$.

c. Determina l'area della regione finita di piano limitata da γ e γ'.

d. Determina i vertici del rettangolo di perimetro massimo inscritto nella regione finita di piano limitata da γ e γ'.

e. Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo di perimetro massimo.

2 Considera la funzione $y = f(x) = \sqrt{|x+h|}$.

a. Determina i valori di h per cui $f(0) = 2$ e indica con f_1 la funzione corrispondente al valore di h positivo e con f_2 la funzione corrispondente al valore di h negativo.

b. Traccia i grafici delle due funzioni f_1 ed f_2 e scrivi l'equazione di una traslazione che trasforma f_1 in f_2.

c. Determina l'area del triangolo mistilineo limitato dall'asse x e dai grafici di f_1 ed f_2.

d. Una retta parallela all'asse x, di equazione $y = t$, con $t > 0$, incontra il grafico di f_1 in A e B, con $x_A < x_B$, e il grafico di f_2 in C e D, con $x_C < x_D$. Traccia il grafico della funzione $g(t) = \overline{BC}$, in un sistema di assi cartesiani in cui t è posto in ascissa, mettendo in evidenza il tratto del grafico che rappresenta il problema.

e. Determina, se esiste, l'equazione della retta parallela all'asse x per cui $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.

Quesiti

3 Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false: in caso sia vera, spiega perché, altrimenti fornisci un controesempio.

a. Se due parabole con asse parallelo all'asse y hanno gli stessi punti di intersezione con l'asse x, allora hanno lo stesso vertice.

b. Se una parabola con asse parallelo all'asse y ha la concavità rivolta verso l'alto, il vertice nel terzo quadrante e interseca l'asse y in un punto di ordinata positiva, allora ha due punti (distinti) in comune con l'asse x, entrambi di ascissa negativa.

4 Descrivi le caratteristiche del fascio di parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2x - a$$

individuandone in particolare i punti base.

Scrivi poi l'equazione della parabola del fascio avente per asse di simmetria la retta di equazione $x = 3$.

5 Scrivi l'equazione della parabola, simmetrica rispetto all'asse y, tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 3x$ nel suo punto P di ascissa 2.

6 Scrivi l'equazione della parabola avente vertice in $V(1,\ 1)$ e come direttrice l'asse x. Determina il punto P della parabola per cui la tangente alla parabola in P forma con l'asse x un angolo di 135°.

7 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2(k-4)x + 2(k-4)y + 2 - k = 0$. Dopo aver verificato che l'equazione del fascio rappresenta una circonferenza per ogni $k \in \mathbf{R}$, determina per quale valore di k si ottiene la circonferenza del fascio di raggio minimo.

8 Discuti graficamente, al variare del parametro k, il numero di soluzioni dell'equazione $2\sqrt{x+4} = x + k$.

9 Traccia il grafico della curva di equazione $|x^2 - 4| + |y| = 5$ e determina l'area della regione finita di piano limitata dalla curva.

10 Dimostra che le rette tangenti a una parabola condotte da un punto P appartenente alla direttrice della parabola stessa sono perpendicolari.

11 Considera una parabola avente fuoco in F e per direttrice la retta d. Siano A e B due punti della parabola allineati con F; indicati con A' e B' i punti simmetrici di A e B rispetto alla direttrice d, dimostra che il quadrilatero $ABB'A'$ è circoscrivibile a una circonferenza.

12 Data la parabola di equazione $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 4$, determina l'area del triangolo individuato dalle rette tangenti alla parabola nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
L'ELLISSE

Problemi

1 **a.** Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha due vertici in $(\pm 4,\ 0)$ e fuochi in $(\pm 2\sqrt{3},\ 0)$.
b. Determina la retta r, parallela all'asse y, contenuta nel semipiano delle ascisse non negative, che interseca l'ellisse in due punti A e B, tali che $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$.
c. Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse in A e B e calcola l'area del triangolo formato dalla retta r e dalle tangenti in A e B.
d. Scrivi l'equazione della parabola che ha come asse la retta di equazione $x = \frac{5}{2}$ e che passa per i vertici dell'ellisse appartenenti, rispettivamente, al semiasse positivo delle x e al semiasse positivo delle y. Determina le aree delle due regioni finite di piano limitate dall'ellisse e dalla parabola.

2 Considera l'equazione

$$x^2 + 4y^2 + 2(k-3)x - 16y - k + 3 = 0$$

a. Verifica che per ogni $k \in \mathbf{R}$ rappresenta un'ellisse.
b. Determina l'equazione dell'ellisse con il centro sull'asse y e rappresentala graficamente, determinandone in particolare il centro, i vertici e i fuochi.
c. A partire dal grafico tracciato al punto precedente, deduci il grafico della curva avente equazione $x^2 + 4y^2 - 16|y| = 0$ e determina l'area della regione di piano racchiusa dalla curva.
d. Determina l'area del quadrato inscritto nell'ellisse determinata al punto **b**.
e. Scrivi l'equazione della circonferenza inscritta nel quadrato.

Quesiti

3 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente i fuochi nei punti di coordinate $(\pm 2,\ 0)$ e passante per $P(0,\ 1)$. Determina poi i vertici del quadrato inscritto nell'ellisse.

4 Considera tre punti A, B, C nel piano e le due ellissi aventi semiasse maggiore di misura a e fuochi, rispettivamente, in A, B e in B, C. Dimostra che un eventuale punto di intersezione delle due ellissi appartiene all'asse di AC.

5 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, determina quale relazione deve sussistere tra a^2 e b^2 affinché il triangolo avente per vertici i due fuochi dell'ellisse e uno dei due vertici dell'ellisse sull'asse y sia equilatero.

6 Traccia il grafico della funzione

$$y = 1 + \sqrt{8 - 2x^2 + |8 - 2x^2|}$$

specificando il dominio e l'immagine della funzione.

7 Scrivi le equazioni delle ellissi che hanno eccentricità $\frac{1}{2}$ e hanno un vertice in $V(-2,\ 0)$.

8 Scrivi l'equazione del luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze da $F_1(-\sqrt{5},\ 0)$ ed $F_2(\sqrt{5},\ 0)$ sia uguale a 10.

9 Determina il perimetro e l'area del rettangolo che ha come vertici i punti che hanno in comune l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ e la circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 3.

10 Scrivi le equazioni delle rette parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, tangenti all'ellisse avente i fuochi sull'asse x, i cui semiassi misurano 2 e 4.

11 Sfruttando opportuni grafici, determina il dominio della funzione $y = \sqrt{|x| - 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$.

12 Data una semicirconferenza di diametro AB e centro O, di raggio unitario, traccia la retta t tangente alla semicirconferenza in B. Sia C il punto medio della semicirconferenza e D il punto in cui la retta AC incontra la retta t. Detto P un punto della semicirconferenza, indica con x la distanza di P dalla retta t e con y la somma $\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2$. Esprimi y in funzione di x e traccia il grafico della funzione ottenuta.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
L'IPERBOLE

Problemi

1 Considera l'iperbole di equazione $4x^2 - y^2 = -4$. Rappresentala graficamente, dopo averne individuato i vertici, i fuochi e gli asintoti, quindi rispondi ai seguenti quesiti.

a. Determina le equazioni delle rette tangenti all'iperbole e parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, calcolando la misura del segmento che congiunge i punti di contatto delle tangenti con l'iperbole.

b. Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha due vertici nei fuochi dell'iperbole e come fuochi i vertici reali dell'iperbole.

c. Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, passante per i fuochi dell'iperbole, che individua con l'asse y un segmento parabolico di area $20\sqrt{5}$.

d. Determina i vertici del rettangolo, avente i lati paralleli agli assi cartesiani e i vertici sull'iperbole, di area $16\sqrt{5}$.

e. Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo.

2 Considera l'equazione:

$$y = \frac{(k-1)x+2}{kx-3}, \text{ con } k \in \mathbf{R}$$

a. Determina per quali valori di k essa rappresenta un'iperbole equilatera.

b. Determina per quale valore di k l'iperbole corrispondente ha come asintoto la retta di equazione $y = -1$. Traccia il grafico dell'iperbole γ corrispondente a questo valore di k.

c. Scrivi l'equazione della parabola, con asse orizzontale, che ha il vertice nel centro dell'iperbole γ e passa per il punto P in cui γ interseca l'asse x.

d. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole γ e alla parabola in P e determina l'area del triangolo individuato da tali tangenti e dall'asse y.

e. Deduci, a partire dal grafico di γ, quello della funzione $y = \left|\frac{4-|x|}{|x|-6}\right|$ e utilizza tale grafico per discutere, al variare di m, il numero delle soluzioni dell'equazione $\left|\frac{4-|x|}{|x|-6}\right| = m$.

Quesiti

3 Dimostra che la corda individuata da una retta tangente a un'iperbole equilatera sugli asintoti dell'iperbole stessa è dimezzata dal punto di contatto.

4 Traccia i grafici delle funzioni $y = \sqrt{x|x|+4}$ e $y = |x+2|$. Utilizzali per risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{x|x|+4} > |x+2|$.

5 Dopo aver definito l'eccentricità e di un'iperbole e spiegato perché è sempre $e > 1$, stabilisci quale delle seguenti affermazioni è corretta, dandone esauriente spiegazione:

a. avere la stessa eccentricità è condizione necessaria ma non sufficiente perché due iperboli siano congruenti;

b. avere la stessa eccentricità è condizione sufficiente ma non necessaria perché due iperboli siano congruenti;

c. avere la stessa eccentricità è condizione necessaria e sufficiente perché due iperboli siano congruenti.

6 Scrivi l'equazione del luogo dei punti per cui la differenza, in valore assoluto, delle distanze da $F_1(0, -4)$ ed $F_2(0, 4)$ è uguale a 6.

7 Rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0$ e indica con Q ed R i suoi due vertici. Detto P un punto dell'iperbole di ascissa x, indica con y l'area del triangolo PQR ed esprimi y in funzione di x. Traccia il grafico della funzione ottenuta.

8 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli assi, che passa per il punto $P(1, \sqrt{5})$. Rappresentala graficamente e determina le equazioni delle rette, parallele all'asse x, che individuano sull'iperbole un segmento di misura uguale a 6.

9 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera avente per asintoti le rette di equazioni $x = -1$, $y = 2$ e passante per il punto $P(1, 1)$. Traccia il grafico dell'iperbole.

10 Considera la funzione $y = \sqrt{x^2 + hx + k}$. Determina h e k in modo che abbia come zeri -1 e 3. Traccia il grafico della funzione per questi valori di h e k.

11 Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze esterne, di centri rispettivamente C_1 e C_2, aventi raggi r_1 ed r_2, con $r_1 > r_2$. Sia P il centro di una circonferenza tangente esternamente a γ_1 e γ_2; dimostra che P appartiene a un'iperbole avente fuochi in C_1 e C_2, specificando la misura dell'asse trasverso di tale iperbole.

12 Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha come asintoti le rette di equazioni $y = \pm 3x$ e passa per $P(3, 1)$. Determina l'equazione della tangente all'iperbole in P.

Le soluzioni sono in fondo al volume

Problemi

1 Considera il fascio di parabole di equazione $y = x^2 - 2(t+1)x + 2$ e descrivine le caratteristiche, individuando in particolare il suo punto base P.

a. Determina l'equazione cartesiana del luogo descritto dai vertici delle parabole del fascio.
b. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(-2, 0)$ e passa per P.
c. Scrivi l'equazione della parabola del fascio tangente alla circonferenza in P.
d. Scrivi l'equazione dell'iperbole, avente come asintoti l'asse x e la retta di equazione $x = 1$, passante per P.
e. Scrivi le equazioni delle parabole del fascio tangenti all'iperbole.

2 Considera la regione di piano Γ definita da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ \sqrt{16 - x^2} + 2y \geq 0 \end{cases}$$

a. Rappresentala e determina la sua area.
b. Determina per quali valori di k la rette del fascio di equazione $x - 2y + 2k = 0$ hanno almeno un punto in comune con Γ.
c. Sul contorno di Γ, considera l'arco $\widehat{AB}$ costituito dai punti Γ di ascissa maggiore o uguale a zero, essendo A e B i punti di ascissa zero (con $y_A < y_B$). Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per A e B, che forma con l'arco $\widehat{AB}$ una regione di piano di area $6\pi - 12$.
d. Determina i vertici del quadrato inscritto nella regione Γ con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Quesiti

3 Sono date le rette r ed s di equazioni rispettivamente $4x - y = 0$ e $x + 2y + 3 = 0$. Siano P e Q, rispettivamente, i punti di intersezione di r ed s con una generica retta t parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Determina l'equazione del luogo descritto dal simmetrico del punto P rispetto a Q, al variare della retta t.

4 Verifica che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\dfrac{8m}{1 + 4m^2} \\ y = \dfrac{1 - 4m^2}{1 + 4m^2} \end{cases}$$

descrivono l'ellisse di equazione

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

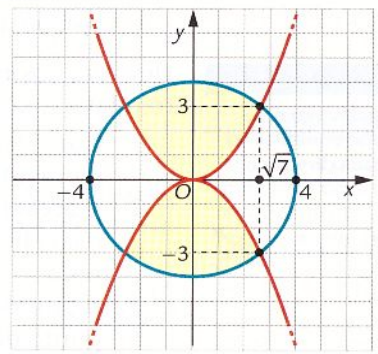
5 Quale regione rappresenta la disequazione $|x^2 + y^2 + ax + by| \leq c$, nell'ipotesi che sia $c > 0$ e $a^2 + b^2 - 4c > 0$? Determina l'area di tale regione.

6 Scrivi l'equazione del luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = -2$ e passanti per l'origine del sistema di riferimento.

7 Studia, al variare del parametro k, la natura della conica di equazione:

$$kx^2 + (k+2)y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

8 Scrivi un sistema che rappresenti analiticamente la regione di piano colorata in figura. La circonferenza ha centro nell'origine e le parabole hanno vertice nell'origine.



9 Illustra quanti punti al massimo possono avere in comune due coniche e in quanti punti al massimo due coniche possono essere tangenti. Fornisci quindi l'esempio di due coniche:

a. che hanno in comune esattamente tre punti;
b. che sono bitangenti;
c. che sono prive di punti di intersezione;
d. che sono tangenti in un punto e hanno altri due punti distinti in comune.

10 Scrivi le equazioni delle circonferenze avente il centro sull'asse y e passanti per l'origine, tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 4$.

11 Discuti, al variare di k, il numero delle soluzioni del sistema $\begin{cases} kx^2 - 2(k-2)x + 1 = 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$

12 Determina le equazioni delle iperboli equilatere, riferite ai propri asintoti, tangenti alla circonferenza passante per l'origine e avente centro in $C(2, 0)$.

VERSO L'ESAME
FUNZIONI ED EQUAZIONI ESPONENZIALI

Problemi

1 Considera la funzione $y = f(x) = \dfrac{2^{x+3} - 4^x}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}$.

a. Determina il dominio della funzione.

b. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni cui appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.

c. Deduci qual è il dominio della funzione $y = \sqrt{f(x)}$.

d. Determina l'espressione analitica $y = g(x)$ della funzione simmetrica di quella data rispetto alla retta di equazione $y = -1$.

e. Stabilisci se il grafico della funzione data e quello della sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = -1$ hanno punti di intersezione e, in caso affermativo, calcola le coordinate di tali punti.

2 Considera la funzione $y = f(x) = |4 - 2^{-x}|$.

a. Traccia il grafico della funzione, specificando il dominio, l'immagine e l'equazione dell'asintoto orizzontale.

b. Discuti, al variare di k, il numero delle soluzioni dell'equazione $|4 - 2^{-x}| = k$.

c. Determina a e b, in modo che il grafico della funzione $y = g(x) = 2^{x+a} + b$ intersechi gli assi cartesiani negli stessi punti del grafico di $y = f(x)$.

d. Traccia il grafico di $y = g(x)$, specificando il dominio, l'immagine e l'equazione dell'asintoto orizzontale e risolvi graficamente la disequazione: $f(x) \geq g(x)$.

e. Determina l'espressione analitica e traccia il grafico della funzione $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, specificandone il dominio e l'immagine.

Quesiti

3 Una delle seguenti espressioni **non** è definita in **R**. Individua quale, dandone esauriente spiegazione.

a. $(1 - \sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ **c.** $(\sqrt{2} - 1)^{\sqrt{2}}$

b. $(\sqrt{2})^{1-\sqrt{2}}$ **d.** $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}-1}$

4 Risolvi la disequazione: $e^{-x}\left(\dfrac{e^x}{e} - e^2\sqrt{e^x}\right) \geq 0$.

5 Determina per quali valori di a la funzione di equazione $y = |a + 2|^x$ è strettamente crescente.

6 Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{100 - x^2}}{\sqrt[3]{2^x} - 8}$$

7 Senza utilizzare la calcolatrice, poni in ordine crescente i seguenti numeri, dando esauriente spiegazione del procedimento seguito:

$(0,1)^{\sqrt{7}}$ $(\sqrt{7})^{0,1}$ $(0,1)^{2\sqrt{2}}$ $(2\sqrt{2})^{0,1}$ $(0,1)^3$ $3^{0,1}$

c d b e a f

8 Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2^x}}{8^y} = 2 \end{cases}$$

9 Determina per quali $a \in \mathbf{R}$ la funzione di equazione $y = \dfrac{1}{e^{-2x} + a^2 - 4}$ è definita in tutto **R**.

10 Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2^{x+1} - 1} - \sqrt{2 - 2x^2}}$$

11 Risolvi la disequazione:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \frac{25}{12}$$

12 Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = |x - 1|$, determina l'espressione analitica e traccia i grafici delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Le soluzioni sono in fondo al volume