1 **VERO O FALSO?**

/20

a. $y = (-2)^x$ definisce una funzione esponenziale. V F

b. La funzione $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}$ è crescente. V F

c. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\pi} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3}$. V F

d. Il grafico della funzione $y = 7^{x-2}$ passa per $A(2;1)$. V F

---

2 **REALTÀ E MODELLI** **In carica** La carica elettrica Q in un dispositivo, durante il suo processo di scarica, dipende dal tempo secondo la legge

/25

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{2}}, \quad \text{con } t \geq 0,$$

dove Q_0 è la carica all'istante $t = 0$ ms.
Quanto vale la carica rispetto al valore iniziale dopo $t = 1$ ms?
E se il denominatore dell'esponente fosse 1000 volte più grande?

3 Determina il dominio delle seguenti funzioni.

/20

a. $y = \sqrt{36 - 6^{3x+1}}$ **b.** $y = \frac{4 - 3^x}{9^x - 3}$

4 Risolvi le seguenti equazioni.

/20

a. $2^{4x+1}\sqrt{4^x} = 8^x \cdot 32$

b. $5^{2x} + 4 \cdot 25^x = \sqrt[4]{5}$

c. $3^{2x-1} - \frac{4}{3^x} = \frac{5}{3}$

5 Risolvi le seguenti disequazioni.

/15

a. $4^x > 2^{5-x}$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} > \frac{9}{4}$

c. $3^{2x} - 8 \cdot 3^x < 9$

---

1 Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

/10

a. $y = 5^x + 2$ **b.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

2 Risolvi le seguenti equazioni.

/15

a. $\frac{4}{2^{2x} + 8} = \frac{1}{4}$

b. $(e^{7x} + 4)(e^{2-5x} - 1) = 0$

c. $(\sqrt{2} \cdot 8^x - 1)\left(2^{-3x+1} - \frac{1}{4}\right) = 0$

3 Determina il dominio delle seguenti funzioni e calcola i loro zeri.

/20

a. $y = \frac{2^{5x} - 1}{8 - 2^{x+1}}$ **b.** $y = \frac{3^x + 2}{\sqrt{4^x + 2^x - 6}}$

4 Risolvi le seguenti disequazioni.

/15

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{|3x-1|} - 4 < 0$ **c.** $\frac{|2x - 1|}{3^x + 1} \leq 0$

b. $(3^{1-7x} - 1)\left(2^{|3-x|} - 2\right) > 0$

5 Risolvi la disequazione $|e^x| \leq 9 - x^2$ usando il metodo grafico.

/20

6 **REALTÀ E MODELLI** **Interesse** Depositando in banca un capitale C_0 a interesse composto i annuale, alla fine di ogni anno l'interesse maturato durante l'anno viene aggiunto al capitale di inizio d'anno.

/20

a. Dimostra che la funzione che permette di calcolare il capitale C accumulato dopo t anni è $C(t) = C_0(1 + i)^t$.

b. Giulia deposita in banca € 20 000 al tasso composto del 2% annuale. Scrivi la funzione $C(t)$, rappresentala graficamente e calcola che capitale ritirerà Giulia fra 8 anni.

1 COMPLETA

...../5

a. $5^{\log_5 15} = \square$

b. $\log 4 + \log 11 = \log \square$

c. $\log_3(9\sqrt{3}) = \square$

d. $\log_{\square}(32) = \frac{5}{2}$

2 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

...../10

a. $\log_3(9 \cdot 5) - \log_3(\log_3 3^5)$;

b. $\log_4 25 + \log_2 \frac{16}{5}$.

3 Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

...../20

a. $y = \left|\log_{\frac{1}{3}} x\right|$; b. $y = \log(x-1) + 2$.

4 Risolvi le seguenti equazioni:

...../45

a. $\log_6(x-3) = 2$; b. $\log(1+x) + 2\log\sqrt{1-x} = \log(9-6x)$; c. $2 \cdot 3^{x+2} = 2^{x+1}$.

5 Risolvi le seguenti disequazioni:

...../20

a. $\log_3(2x+3) < \log_3(x-4)$; b. $\log_{\frac{1}{2}}(3x) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > 1$.

1 REALTÀ E MODELLI **Galline ovaiole** Per valutare l'efficacia dell'alimentazione sulla produzione di uova, due gruppi separati di galline vengono nutriti con due mangimi diversi. La produzione viene monitorata nel corso del tempo: nel gruppo nutrito con il mangime di tipo 1, il numero di uova prodotte nel tempo è $N_1(t) = 900 \cdot \log(t+1)$, mentre nel gruppo nutrito con il mangime di tipo 2 è $N_2(t) = 900 \cdot \log(4\sqrt{t}+1)$, dove t è misurato in giorni.

...../20

Determina quale mangime è più efficace e per quale periodo.

2 Verifica l'identità $\dfrac{\log_a x}{1+\log_a b} = \dfrac{\log_b x}{1+\log_b a}$.

...../5

3 Risolvi le seguenti equazioni.

...../10

a. $\log_4 \dfrac{x^2-1}{2x} - \dfrac{1}{2}\log_2(x+1) = -2$ b. $2^{x-1} = 5^{2x}$

4 Risolvi le seguenti disequazioni.

...../30

a. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\log_2 x} > \dfrac{1}{2}$ b. $\dfrac{1}{\log_3 \log_2 x} > 0$ c. $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\log_2 x - 2} \geq 0$

5 Determina il dominio delle seguenti funzioni e calcola i loro zeri.

...../20

a. $y = \dfrac{\log x - 4}{\log(x-4)}$ b. $y = \log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-1)]$

6 Risolvi la disequazione $|\ln x| \geq 4 - x^2$ utilizzando il metodo grafico.

...../15

1 Sapendo che $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcola:

$\cos\alpha$, $\tan\alpha$ e $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

2 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a. $\sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{2} + \tan\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \cot\frac{3}{4}\pi$ **b.** $\sin^2\frac{5}{3}\pi - \cot\frac{3}{2}\pi + \cos\frac{11}{6}\pi \cdot \tan\frac{\pi}{6}$

3 Semplifica le seguenti espressioni.

a. $\sin(180° - \alpha)\tan(90° - \alpha) - \cos(-\alpha) + \sin(\alpha - 90°) - \cos(360° + \alpha)$

b. $\sin(-\alpha)\cos(3\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\sin\left(\frac{11}{2}\pi + \alpha\right)$

4 Verifica l'identità.

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} + 2\tan\alpha\cos^2\alpha - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{\tan\alpha}{2}(1 - \sin^2\alpha) - 1$$

5 Determina il periodo della funzione $y = 4\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

6 Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

a. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **b.** $y = -3\cos x$ **c.** $y = \left|\tan\frac{x}{2}\right|$ **d.** $y = 2\sin 2x + 2$

1 Semplifica le seguenti espressioni:

a. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 2\alpha\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos^2\alpha$;

b. $2\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$.

2 Trova l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$ nei suoi punti di ascissa -3 e 2.

3 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{A}$ è il doppio dell'angolo $\widehat{B}$ e $\tan\widehat{A} = \frac{24}{7}$. Trova $\sin\widehat{B}$ e $\sin\widehat{C}$.

4 Dimostra che in un triangolo ABC, con l'angolo $\widehat{B} = 2\widehat{A}$, si ha: $\frac{\tan\widehat{A}\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}} = \frac{2\sin\widehat{C}}{4\cos^2\widehat{A} - 1}$.

5 Rappresenta graficamente la funzione

$$y = 2\sqrt{3}\sin 4x - 2\cos 4x + \frac{1}{2}$$

e indica il suo periodo.

1 Risolvi le seguenti equazioni:

a. $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin(-2x) - 3 = 0$; **b.** $2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos 2x - 1 = 0$; **c.** $\dfrac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)+1} = 2$.

2 Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $(2\sin x - 1)(\sin x - \cos x) \geq 0$;

b. $\dfrac{2\cos x - \sqrt{2}}{1-\tan^2 x} > 0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$;

c. $4\{2\cos x[\cos(-x)+1] + \sin^2 x\}[\cos(-x) - 1] \leq 0$.

3 Trova il dominio della funzione:

$f(x) = \sqrt{\sin 2x - \cos x} - \sqrt{\sin x}$.

4 Traccia i grafici delle funzioni $y = \sin x - \cos x$ e $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\tan x - 1)$ e determina i loro punti di intersezione.

5 Discuti e individua graficamente il numero di soluzioni dell'equazione $k\sin\dfrac{x}{2} - 2k + 1 = 0$ nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \dfrac{5}{3}\pi$, con $k \in \mathbb{R}$.

6 Data la funzione $f(x) = \cos 2x + \cos x$, determina dominio, codominio e periodo e trova per quali valori di x si ha $f(x) > -1$.

38 In una circonferenza di raggio r traccia il diametro AB e il diametro CD a esso perpendicolare. Sull'arco minore $\overset{\frown}{DB}$ considera un punto P e, posto $P\widehat{A}B = x$, trova per quali valori di x si ha:

$2\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PC} + \overline{AC}$.

$\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$

39 In un triangolo equilatero ABC di lato 2, la retta s è perpendicolare al lato BC in un suo punto H. Sia P il punto di s, nel semipiano non contenente il triangolo, tale che $\overline{BP} = 2$; posto $C\widehat{B}P = x$:

a. determina la funzione $f(x)$ che esprime la somma dell'area del triangolo BPH con il doppio di quella del triangolo equilatero di lato BH e disegna il grafico corrispondente;

b. risolvi la disequazione $f(x) \geq 2\sqrt{3}$. $\left[\text{a) } f(x) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}, \text{ con } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; \text{ b) } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}\right]$

41 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$ e centro O, è condotta la semiretta contenente il raggio OQ perpendicolare ad AB. Considerato il generico punto P della semicirconferenza indica con H la sua proiezione su AB e con L il punto della semiretta OQ tale che l'angolo $H\widehat{P}L$ sia diviso in due parti congruenti dal raggio OP.

a. Esprimi la misura di OL in funzione dell'angolo $x = O\widehat{P}L$, indicando anche il corrispondente dominio.

b. Determina per quali valori di x la misura di OL è maggiore del raggio.

$\left[\text{a) } \overline{OL} = \dfrac{1}{2\cos x}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \text{ b) } \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}\right]$

42 P è un punto variabile su una semicirconferenza di raggio 2 e H la sua proiezione sul diametro AB.

a. Studia la funzione $f(x) = \overline{PH} + \overline{HB}$ al variare dell'angolo $x = P\widehat{A}H$ e rappresenta il tratto di grafico che si riferisce al problema.

b. Trova per quali valori di x il valore della funzione è minore della misura del raggio.

$\left[\text{a) } f(x) = 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2; \text{ b) } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{8}\right]$