VERSO L'ESAME
FUNZIONI ED EQUAZIONI ESPONENZIALI

■ Problemi

1 Considera la funzione $y = f(x) = \dfrac{2^{x+3} - 4^x}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}$.

a. Determina il dominio della funzione.

b. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni cui appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.

c. Deduci qual è il dominio della funzione $y = \sqrt{f(x)}$.

d. Determina l'espressione analitica $y = g(x)$ della funzione simmetrica di quella data rispetto alla retta di equazione $y = -1$.

e. Stabilisci se il grafico della funzione data e quello della sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = -1$ hanno punti di intersezione e, in caso affermativo, calcola le coordinate di tali punti.

2 Considera la funzione $y = f(x) = |4 - 2^{-x}|$.

a. Traccia il grafico della funzione, specificando il dominio, l'immagine e l'equazione dell'asintoto orizzontale.

b. Discuti, al variare di k, il numero delle soluzioni dell'equazione $|4 - 2^{-x}| = k$.

c. Determina a e b, in modo che il grafico della funzione $y = g(x) = 2^{x+a} + b$ intersechi gli assi cartesiani negli stessi punti del grafico di $y = f(x)$.

d. Traccia il grafico di $y = g(x)$, specificando il dominio, l'immagine e l'equazione dell'asintoto orizzontale e risolvi graficamente la disequazione: $f(x) \geq g(x)$.

e. Determina l'espressione analitica e traccia il grafico della funzione $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, specificandone il dominio e l'immagine.

■ Quesiti

3 Una delle seguenti espressioni **non** è definita in R. Individua quale, dandone esauriente spiegazione.

a. $(1 - \sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ **c.** $(\sqrt{2} - 1)^{\sqrt{2}}$

b. $(\sqrt{2})^{1-\sqrt{2}}$ **d.** $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}-1}$

4 Risolvi la disequazione: $e^{-x}\left(\dfrac{e^x}{e} - e^2\sqrt{e^x}\right) \geq 0$.

5 Determina per quali valori di a la funzione di equazione $y = |a + 2|^x$ è strettamente crescente.

6 Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{100 - x^2}}{\sqrt[3]{2^x} - 8}$$

7 Senza utilizzare la calcolatrice, poni in ordine crescente i seguenti numeri, dando esauriente spiegazione del procedimento seguito:

$$(0{,}1)^{\sqrt{7}} \quad (\sqrt{7})^{0{,}1} \quad (0{,}1)^{2\sqrt{2}} \quad (2\sqrt{2})^{0{,}1} \quad (0{,}1)^3 \quad 3^{0{,}1}$$

8 Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2^x}}{8^y} = 2 \end{cases}$$

9 Determina per quali $a \in$ R la funzione di equazione $y = \dfrac{1}{e^{-2x} + a^2 - 4}$ è definita in tutto R.

10 Determina il dominio della funzione:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2^{x+1} - 1} - \sqrt{2 - 2x^2}}$$

11 Risolvi la disequazione:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \frac{25}{12}$$

12 Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = |x - 1|$, determina l'espressione analitica e traccia i grafici delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
FUNZIONI, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Problemi

1 Considera la funzione $y = x \log_2 \dfrac{x-2}{x+2}$.

a. Determina il suo dominio.
b. Studia il segno della funzione e determina le coordinate degli eventuali punti di intersezione con gli assi.
c. Stabilisci se si tratta di una funzione pari o dispari.
d. Determina le coordinate del punto di intersezione del suo grafico con la bisettrice del secondo e del quarto quadrante.
e. Stabilisci se la funzione data è *uguale* a quella di equazione $y = x\log_2(x-2) - x\log_2(x+2)$, giustificando la risposta.

2 Considera le funzioni:

$f(x) = 2^{x-1}$; $\quad g(x) = |\log_2 x|$

a. Traccia il grafico di ciascuna delle due funzioni, specificandone in particolare dominio e immagine.
b. Stabilisci graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ e un intervallo al quale appartengono le soluzioni.
c. Stabilisci quale delle due funzioni è invertibile; determina l'espressione analitica e il grafico dell'inversa.
d. Determina l'espressione analitica di $g \circ f$ e tracciane il grafico.
e. Determina l'espressione analitica di $f \circ g$ e tracciane il grafico.

Quesiti

3 Risolvi la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x) \leq -5$.

4 Determina il dominio della funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}}{\ln x}$$

5 Dimostra che $\log_5 6$ è irrazionale.

6 Determina il valore dell'espressione:

$$\frac{(\log_4 3)(\log_2 3)^{-1} + \log_4 \sqrt[3]{2}}{\log_2 28 - (\log_3 7)(\log_3 2)^{-1}}$$

7 Studia, al variare del parametro k, il dominio della funzione $y = \dfrac{1}{e^{2x} - k}$.

8 Senza utilizzare la calcolatrice, ordina in senso crescente i seguenti numeri, dando esauriente spiegazione:

$$\ln \pi; \quad \log_\pi 2\pi - \log_\pi 2; \quad \log_\pi e; \quad \ln \frac{1}{\pi}$$

9 Utilizzando opportune trasformazioni geometriche deduci, a partire dal grafico di $y = \log_2 x$, il grafico della funzione $y = 1 + \log_2 \dfrac{1}{x^2}$. Specifica il dominio, gli zeri e l'immagine di quest'ultima funzione.

10 Risolvi l'equazione:

$$\log_2 (x+4) + \log_{\frac{1}{2}}(x+3) = \log_2(x+10) - 2$$

11 Determina a e b in modo che la funzione $y = \log_2\left(\dfrac{1}{2}x + a\right) + b$ abbia come asintoto verticale la retta di equazione $x = -2$ e come zero $x = 6$. Traccia il grafico della funzione corrispondente a questi valori di a e b.

12 La crescita della popolazione di una città segue una legge esponenziale. Sapendo che la popolazione raddoppia in 18 mesi e che la popolazione attuale è di 100 000 abitanti, quale sarà la popolazione tra due anni?

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
GLI ANGOLI E LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Problemi

1 Considera la funzione $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

a. Determina il suo periodo e tracciane il grafico nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

b. Traccia il grafico della funzione $y = |f(x)|$. Stabilisci se si tratta di una funzione periodica e, in caso affermativo, determina il periodo.

c. Traccia il grafico della funzione $y = f(|x|)$. Stabilisci se si tratta di una funzione periodica e, in caso affermativo, determina il periodo.

d. Data la funzione $g(x) = a\tan(bx) + c$, con $b > 0$, determina a, b e c in modo che abbia lo stesso periodo della funzione f e passi per i punti di ascissa 0 e $\frac{\pi}{2}$ appartenenti al grafico di f. Traccia il grafico della funzione g corrispondente ai valori di a, b e c trovati nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

e. Stabilisci se la funzione g è invertibile nell'intervallo $(-\pi, \pi)$. In caso affermativo, determina l'espressione analitica della funzione inversa e tracciane il grafico.

2 Considera la famiglia di parabole di equazione:
$y = x^2 - 2x\sin\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha$ con $\alpha \in [0, 2\pi]$

a. Traccia il grafico della parabola γ_1 della famiglia che corrisponde al valore $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

b. Traccia il grafico della parabola γ_2 della famiglia che corrisponde al valore $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

c. Verifica che le due parabole γ_1 e γ_2 sono simmetriche rispetto all'asse y e calcola l'area della regione finita di piano limitata dai loro grafici e dall'asse x.

d. Determina l'espressione analitica della funzione $f(\alpha) = \overline{AB}$, essendo A e B i punti di intersezione di una parabola della famiglia con l'asse x, e tracciane il grafico nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

e. Determina l'equazione del luogo descritto dai vertici delle parabole della famiglia al variare di α nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Quesiti

3 Dopo aver definito che cosa si intende come funzione *periodica*, determina il periodo delle seguenti funzioni:

a. $y = |\cos x|$

b. $y = \sin x + \sin\frac{x}{2}$

c. $y = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

4 Verifica la seguente identità:

$$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha} = \cos\alpha(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

5 Data la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, siano A e B i suoi punti di intersezione con l'asse $x (x_A < x_B)$. Sia P un punto appartenente all'arco $\widehat{AB}$ della parabola. Verifica che $\tan P\hat{A}B + \tan P\hat{B}A$ è costante al variare di P.

6 Fornisci l'esempio di una funzione che soddisfi le seguenti caratteristiche:

a. sia periodica, di periodo uguale a 4;

b. sia dispari;

c. abbia come immagine l'intervallo $[-3, 3]$.

7 Traccia il grafico della funzione $y = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$ in un intervallo di lunghezza uguale al suo periodo. Specifica il dominio e l'immagine della funzione.

8 Calcola i valori delle seguenti espressioni:

a. $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$

b. $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

c. $\cos\left(\arctan(2\sqrt{2})\right)$

9 Siano α e β due angoli di un triangolo, tali che $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ e $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Supponi che uno dei due angoli sia ottuso; che cosa puoi affermare?

a. necessariamente α è acuto e β è ottuso

b. necessariamente α è ottuso e β è acuto

c. è possibile sia che α sia acuto e β sia ottuso, sia che α sia ottuso e β sia acuto

d. non è possibile che uno dei due angoli sia ottuso

Individua l'affermazione corretta, dandone esauriente spiegazione.

10 Determina la misura sia in radianti, sia in gradi primi e secondi, degli angoli interni a un ettagono regolare.

11 Determina il valore dell'espressione

$\sin^2 40° + \cos^2 140°$

illustrando il procedimento seguito.

12 Considera la funzione $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tan x}$ e sia $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$. Calcola:

a. $f(\alpha)$ **b.** $f(\pi + \alpha)$ **c.** $f(2\pi + \alpha)$

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Problemi

1 Considera la funzione:

$y = f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 1$

a. Scrivi l'equazione della funzione nella forma $y = A\sin(x + \varphi) + B$ e tracciane il grafico.

b. Determina gli zeri della funzione.

c. Determina le coordinate dei punti di intersezione tra il grafico della funzione e la retta di equazione $y = \sqrt{2} - 1$.

d. Considera la funzione $y = g(x) = \sin x - m\cos 2x$ e determina m in modo che il suo grafico passi per il punto del grafico di f di ascissa $\frac{\pi}{6}$.

e. In corrispondenza del valore di m trovato al punto precedente determina le coordinate di tutti i punti di intersezione tra il grafico di f e il grafico di g nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

2 Considera la famiglia di curve di equazione:

$y = x^2\sin^2\alpha - 2x\cos^2\alpha - 1$

a. Determina i punti P e $Q(y_P < y_Q)$ per cui passano tutte le curve della famiglia.

b. Determina per quali valori di α le curve della famiglia sono parabole.

Supposta verificata la condizione del punto **b**, risolvi i seguenti quesiti.

c. Verifica che tutte le parabole della famiglia intersecano l'asse x in due punti distinti, che chiamiamo A e B $(x_A < x_B)$, di cui devi determinare le coordinate.

d. Determina per quali valori di α l'area del quadrilatero $APBQ$ è uguale a $4\sqrt{3}$ e scrivi l'equazione della parabola della famiglia che si ottiene in corrispondenza di questi valori di α.

e. Scrivi l'equazione cartesiana del luogo descritto dai vertici delle parabole della famiglia.

Quesiti

3 Determina per quali valori di k la funzione

$y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x - k}$ ha come dominio $\mathbf{R}$.

4 Determina il dominio e gli zeri della funzione

$y = \dfrac{\cos 2x - 2\sin x - 1}{\sin 2x - 2\sin x}$

5 Verifica la seguente identità, dopo averne individuato le condizioni di esistenza:

$\ln|\sin\alpha| = \frac{1}{2}\ln|1 - \cos 2\alpha| - \ln\sqrt{2}$

6 Risolvi l'equazione $4^{\tan x} - 2^{\tan x - 1} = 2^{\tan x} - \frac{1}{2}$.

7 Determina per quale valore di $t \in \mathbf{R}$ l'equazione $\sin^2 x + t\sin x\cos x = 2$ ammette tra le sue soluzioni $x = \frac{\pi}{4}$. Determina quindi tutte le soluzioni dell'equazione in corrispondenza di questo valore di t.

8 Considera la funzione $y = \dfrac{1}{\pi\sin x - 2x}$. Uno solo dei seguenti insiemi rappresenta il suo dominio. Individua quale, motivando adeguatamente la risposta.

a. $\mathbf{R}$ **c.** $\mathbf{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$

b. $\mathbf{R} - \{0\}$ **d.** $\mathbf{R} - \left\{0, \pm\frac{\pi}{2}\right\}$

9 Definisci che cos'è un'equazione lineare in seno e coseno ed esponi i metodi che conosci per risolverla. Fornisci l'esempio:

a. di un'equazione lineare in seno e coseno priva di soluzioni;

b. di un'equazione lineare in seno e coseno che ha tra le sue soluzioni $x = \frac{3\pi}{2}$.

10 Traccia i grafici delle due funzioni $y = -2\cos\frac{x}{2}$ e $y = 2\sin x$ nell'intervallo $[0, 4\pi]$ e determina le coordinate dei loro punti di intersezione.

11 Data la circonferenza di equazione

$x^2 + y^2 - 2(\sin^2\alpha - \cos\alpha - 1)x +$
$-2(\sin\alpha - \cos\alpha)y - 1 = 0$

determina per quali valori di α:

a. ha il centro sull'asse x

b. ha il centro sull'asse y

12 Una retta passante per l'origine forma con l'asse delle ascisse un angolo la cui misura è il doppio della soluzione, appartenente all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dell'equazione $7 - 3\cos^2 x - 8\sin x = 0$. Scrivi l'equazione della retta.

Le soluzioni sono in fondo al volume

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Problemi

1 Considera le funzioni

$f(x) = 3\sqrt{2 - 2\cos^2 x} - \sin x$ e $g(x) = 2\sin x + 1$

a. Determina il dominio di f e di g.
b. Determina gli zeri di f e di g.
c. Determina il dominio della funzione $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
d. Determina il dominio e gli zeri della funzione $y = \ln \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
e. Determina per quali valori di x risulta

$f(x) \geq g(x)$

2 Considera le due equazioni:

$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x\sin\alpha - 2y\cos\alpha - 8 = 0$
$\gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x\sin\alpha - 2y\cos\alpha - 3\cos^2\alpha +$
$+ 5\sin^2\alpha = 0$

a. Verifica che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ esse rappresentano delle circonferenze, di cui devi trovare centro e raggio.
b. Determina l'equazione cartesiana e la rappresentazione grafica del luogo descritto, al variare di α, dal centro di γ_1.
c. Determina l'equazione cartesiana e la rappresentazione grafica del luogo descritto, al variare di α, dal centro di γ_2.
d. Determina per quali valori di α le due circonferenze γ_1 e γ_2 sono secanti.
e. Determina per quali valori di α l'asse radicale delle due circonferenze è la retta di equazione $x = \dfrac{13}{4}$.
f. Scrivi le equazioni delle due circonferenze aventi il centro sull'asse x che soddisfano la condizione espressa al punto precedente e determina la misura della corda che hanno in comune.

Quesiti

3 Determina per quali valori di α l'equazione $x^2 - 4x\cos\alpha + 1 = 0$ **non** ha soluzioni reali.

4 Determina il dominio e gli zeri della funzione

$y = 2^{\sqrt{2\tan^2 x - 2\tan x}} - 4$

5 Risolvi la disequazione $\log_2\left(2^{\sin x + \frac{1}{\sin x}} + 4\right) \geq 3$.

6 Sia $a > 0$ e $a \neq 1$. Determina, al variare di a, il dominio della funzione

$y = \sqrt{\log_a(\sin x - \cos x)}$

7 Esponi i metodi che conosci per risolvere una disequazione del tipo $\sin x \geq m$, con $m \in \mathbf{R}$. Fornisci l'esempio di una disequazione di questa forma:
a. che sia priva di soluzioni;
b. che abbia come insieme delle soluzioni

$S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

c. che abbia come insieme delle soluzioni $\mathbf{R}$.

8 Discuti, al variare di k, il sistema:

$$\begin{cases} \cos^2 x - k\sin x = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

9 Data la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2\,(2\sin\alpha - 1)x - 2x\cos\alpha - 1 = 0$$

determina per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ il centro appartiene al terzo quadrante.

10 Determina k in modo che il dominio della funzione:

$$y = \frac{1}{\cos 2x - k\cos x + 2k}$$

sia $\mathbf{R}$.

11 Risolvi la disequazione $\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq 1$ in due modi diversi:
a. utilizzando il grafico della funzione $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x - 1$;
b. confrontando i grafici delle funzioni

$y = \sin x - 1$ e $y = \sqrt{3}\cos x$.

12 Una sola tra le seguenti funzioni ha come dominio $\mathbf{R}$. Individua quale, dandone esauriente spiegazione.
a. $y = \sqrt{\cos x - x^2}$
b. $y = \sqrt{\cos x - \cos^2 x}$
c. $y = \sqrt{\cos x + x^2}$
d. $y = \sqrt{\cos x + \cos^2 x}$

Le soluzioni sono in fondo al volume

Problemi

1 In un triangolo ABC (non degenere) risulta:

$\overline{BC} = 2$, $C\widehat{A}B = \frac{\pi}{4}$ e $A\widehat{B}C = x$

a. Indica con M il punto medio di BC e determina l'espressione analitica della funzione $y = \overline{AM}^2$.
b. Scrivi l'equazione della funzione ottenuta nella forma $y = A\sin(2x + \varphi) + B$ e tracciane il grafico nell'intervallo $[0, 2\pi]$, mettendone in evidenza il tratto relativo al problema.
c. Determina per quali valori di x la mediana AM misura $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.
d. Determina per quale valore di x la misura della mediana AM è massima.
e. Considera il triangolo che si ottiene in corrispondenza del valore di x per cui AM ha lunghezza massima e, riferito il triangolo a un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, determina le coordinate dei vertici del triangolo e l'equazione della circonferenza circoscritta.

2 In un triangolo ABC (non degenere) è $\overline{BC} = 4$, $A\widehat{C}B = x$ e $\tan A\widehat{B}C = 2$; traccia le altezze AH e CK relative rispettivamente a BC e ad AB e risolvi i seguenti quesiti.
a. Determina l'espressione analitica della funzione $y = \frac{\overline{AH} + \sqrt{5}\,\overline{CK}}{\overline{AC}}$ e traccia il grafico della funzione ottenuta, mettendone in evidenza il tratto relativo al problema.
b. Determina per quale valore di x si ottiene il massimo valore di y.
c. Discuti, al variare di k, l'esistenza e il numero dei valori di x per cui risulta:

$$\frac{\overline{AH} + \sqrt{5}\,\overline{CK}}{\overline{AC}} = k$$

d. Verifica che $\overline{AB} + \overline{AC} = 4\sqrt{5}$ se e solo se il triangolo ABC è isoscele sulla base BC.
e. Nelle ipotesi di cui al punto precedente, riferisci il triangolo a un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale e scrivi l'equazione dell'ellisse passante per A e avente fuochi in B e C.

Quesiti

3 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AC, è $\overline{AB} = \overline{BC} = l$. Posto $A\widehat{B}C = 2x$, determina x in modo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle altezze del triangolo sia $\frac{7}{4}l^2$. Determina inoltre i perimetri dei triangoli che soddisfano questa condizione.

4 In un triangolo ABC si ha
$A\widehat{B}C = \beta = \frac{\pi}{4}$ e $A\widehat{C}B = \gamma = \arcsin\frac{3}{5}$
Sapendo che l'area del triangolo è $42a^2$, determina le misure dei lati.

5 Dimostra che la misura dell'altezza di un triangolo relativa al lato di misura a è $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$, essendo α, β e γ i tre angoli del triangolo opposti rispettivamente ai lati di misura a, b e c.

6 Indichiamo con a, b e c le misure dei lati di un triangolo e con α, β e γ le misure degli angoli opposti, rispettivamente, a tali lati. In solo uno tra i seguenti quattro casi esiste un triangolo non degenere che soddisfa le condizioni date. Individualo, dandone esauriente spiegazione, e risolvi il corrispondente triangolo.
a. $a = 2$, $b = 6$ e $c = 10$ **c.** $a = 5$, $b = 6$ e $c = 11$
b. $a = 3$, $b = 5$ e $\alpha = 41°$ **d.** $a = 4$, $b = 2$ e $\alpha = 45°$

7 Esponi tutte le formule che conosci per il calcolo dell'area di un triangolo. In ciascuno dei seguenti casi, calcola l'area del triangolo, utilizzando la formula che ritieni più opportuna:
a. un triangolo isoscele ABC sulla base AB, in cui $AB = 12$ cm e $AC = BC = 10$ cm;
b. un triangolo ABC in cui $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm e $\cos A\widehat{B}C = -\frac{3}{5}$;
c. un triangolo i cui lati sono lunghi 7 cm, 8 cm e 9 cm.

8 In una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r, considera due corde AD e BC, tali che: $\overline{AD} = r$ e $\overline{BC} = \frac{r}{2}$. Determina la misura della corda CD.

9 Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina, assumendo come incognita un angolo, il triangolo ABC inscritto nella semicirconferenza avente perimetro massimo.

10 Considera un triangolo (non degenere) ABC in cui $\overline{AB} = 2a$, $A\widehat{B}C = 2x$ e $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{3}$. Determina per quali valori di x il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo è maggiore o uguale a $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

11 In un trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore AB, la diagonale AC misura a ed è perpendicolare al lato obliquo BC. Determina l'angolo $B\widehat{A}C$ in modo che risulti $\overline{AB} + \overline{CD} = \frac{7}{2}\overline{BC}$.

12 Considera un triangolo equilatero ABC, inscritto in una circonferenza di raggio r. Considera un punto P sul minore dei due archi AC e dimostra, utilizzando i teoremi di trigonometria, che $\overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PC}$.

Le soluzioni sono in fondo al volume

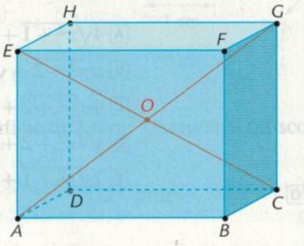
VERSO L'ESAME
MISURE DI SUPERFICI E DI VOLUMI

Problemi

1 Una piramide triangolare regolare ha base di lato $6a$. Il volume della piramide è $18a^3\sqrt{3}$.

a. Verifica che l'altezza della piramide è congruente al lato di base.
b. Calcola l'area della superficie totale della piramide.
c. Determina a quale distanza dal vertice della piramide va condotto un piano parallelo alla base, in modo che tale piano divida la piramide in due parti equivalenti.
d. Determina a quale distanza dal vertice della piramide va condotto un piano parallelo alla base, in modo che il prisma avente come basi la sezione della piramide con il piano e la sua proiezione ortogonale sulla base della piramide stessa abbia superficie totale di area massima.
e. Determina il raggio della sfera circoscritta alla piramide.

2 Considera il parallelepipedo rettangolo in figura.



Si sa che lo spigolo BC è $\frac{3}{5}$ di AB, che lo spigolo BF è $\frac{4}{3}$ di BC e che le diagonali misurano $5a\sqrt{2}$.

a. Verifica che le misure degli spigoli del parallelepipedo sono $3a$, $4a$ e $5a$.
b. Dimostra che le diagonali AG e BH sono perpendicolari.
c. Detto M il punto medio dello spigolo EF e condotto il piano BCM, determina la natura della sezione del parallelepipedo con il piano e l'area di tale sezione.
d. Determina il volume dei due solidi in cui il parallelepipedo viene diviso da tale piano BCM.
e. Determina la distanza del punto G dal piano BCM.
f. Determina l'area della superficie e il volume della sfera circoscritta al parallelepipedo.

Quesiti

3 Due recipienti hanno l'uno la forma di un cilindro equilatero e l'altro la forma di una sfera di raggio r. Il cerchio di base del cilindro è congruente al raggio della sfera. Il recipiente di forma sferica è pieno d'acqua, mentre quello di forma cilindrica è vuoto. Tutta l'acqua contenuta nel recipiente di forma sferica viene versata nel recipiente vuoto a forma cilindrica; quale altezza raggiunge l'acqua?

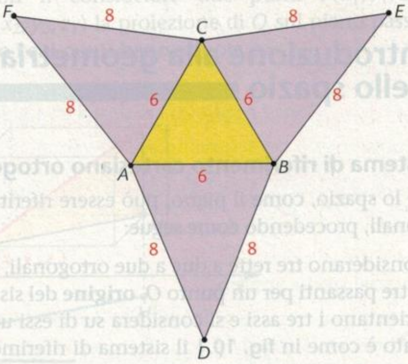
4 Un cono, la cui altezza è $\frac{3}{2}$ del diametro di base, ha volume $8\pi a^3$. Determina il volume della piramide quadrangolare regolare inscritta nel cono.

5 Fornisci l'esempio di tre diversi solidi di rotazione il cui volume è 36π cm^3.

6 Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza 1 cm. Determina il volume e l'area della superficie totale della piramide.

7 Considera un triangolo acutangolo ABC. Sia V_1 il volume de solido che si ottiene da una rotazione completa del triangolo intorno ad AB e V_2 il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa del triangolo intorno alla retta parallela ad AB e passante per C. Dimostra che il rapporto tra V_1 e V_2 è costante, qualsiasi siano le misure dei lati del triangolo ABC.

8 Nella figura qui sotto ABC è un triangolo equilatero il cui lato è lungo 6 cm; i triangoli ADB, BEC e AFC sono isosceli e i lati obliqui sono lunghi 8 cm. Considera la piramide che ha come sviluppo tale figura; stabilisci se è regolare e calcola il suo volume.



9 Considera un parallelepipedo retto, di base $ABCD$. Considera i due piani perpendicolari alla base $ABCD$ e contenenti, rispettivamente, la diagonale AC e la diagonale BD. Questi due piani dividono il parallelepipedo in quattro prismi di base triangolare. Dimostra che questi quattro prismi sono equivalenti.

10 Determina il rapporto tra il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r e il volume della sfera stessa.

11 Una piramide quadrangolare regolare ha come base il quadrato $ABCD$ e vertice V. La faccia BVC forma con la base un angolo di 45°. Sapendo che il volume della piramide è 36 cm^3, calcola l'area della superficie totale della piramide.

12 Un cono ha apotema di misura $10a$ e raggio di base di misura $6a$. La sezione del cono con un piano parallelo alla sua base ha area $9\pi a^2$. Qual è il volume del tronco di cono che ha come basi la sezione del cono con il piano e la base stessa del cono?

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Problemi

1 Considera il cubo i cui spigoli hanno lunghezza 1 rappresentato in figura.

Riferisci la figura a un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'origine coincide con il punto A e i versori degli assi x, y, z sono rispettivamente i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.

Siano I, J, K rispettivamente i punti medi dei segmenti BC, BF e HF.

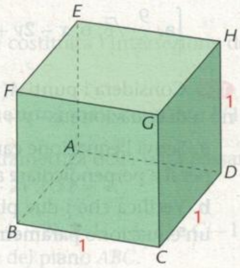
a. Determina le coordinate dei punti I, J, K.

b. Scrivi l'equazione del piano IJK.

c. Determina la distanza del centro del cubo dal piano IJK.

d. Scrivi l'equazione della superficie sferica circoscritta al cubo.

e. Determina il raggio della circonferenza che si ottiene dalla sezione della sfera con il piano IJK.



h. Scrivi l'equazione della superficie sferica γ che ha centro in G e passa per K.

i. Determina centro e raggio della circonferenza che risulta dall'intersezione della superficie sferica γ con il piano FIH.

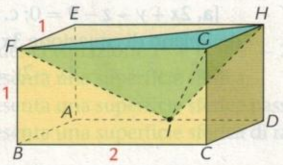
2 Considera il parallelepipedo rettangolo in figura, in cui gli spigoli AB e AE misurano 1, mentre lo spigolo AD misura 2. Il punto I è il punto medio di AD.

Senza riferire la figura a un sistema di assi cartesiani, rispondi ai seguenti quesiti.

a. Determina il volume del tetraedro che ha come base FGH e come vertice I.

b. Dimostra che il triangolo FIH è rettangolo in I e calcolane l'area.

c. Determina la distanza del vertice G dal piano FIH.



Riferisci ora la figura a un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'origine coincide con il punto A e i versori degli assi x, y, z sono rispettivamente i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AE}$ e rispondi ai seguenti ulteriori quesiti.

d. Scrivi le equazioni delle rette FI e HI e ritrova per via analitica che il triangolo FIH è rettangolo.

e. Scrivi l'equazione del piano FIH.

f. Determina analiticamente la distanza del punto G dal piano FIH, ritrovando il risultato determinato nel punto *c*.

g. Determina le coordinate del punto K, intersezione del piano FIH con la retta AG.

Quesiti

3 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(4, -1, -1)$, $B(0, 3, -1)$ e $C(0, -1, 0)$ è isoscele e determina le coordinate del piede dell'altezza del triangolo relativa alla base.

4 Scrivi l'equazione della retta passante per i due punti $A(3, 0, 1)$ e $B(-1, 2, 4)$:

a. in forma parametrica; **b.** in forma cartesiana.

5 Scrivi l'equazione del piano passante per $P(-1, 2, 3)$ e perpendicolare alla retta di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

6 Determina per quale valore di k i due piani di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$ e $(k-1)x + ky - 3z - 1 = 0$ sono perpendicolari.

7 Stabilisci se la retta di equazioni $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ è incidente, parallela o appartenente al piano di equazione $x - y + z = 3$.

8 Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(-1, 2, 3)$ e parallela alla retta che costituisce l'intersezione dei due piani di equazione $x - 2y + z = -1$ e $x - z = 2$.

9 Scrivi l'equazione della superficie sferica di centro $C(-1, 2, 3)$, passante per $P(1, 2, 4)$.

10 Stabilisci se il piano di equazione $x - y + z + 4 = 0$ è tangente alla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10 = 0$.

11 Stabilisci se le due rette di equazioni $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -3t \end{cases}$ e $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$ sono incidenti, parallele o sghembe.

12 Vero o falso?

a. il piano passante per $A(2, 3, -1)$ e parallelo al piano xz ha equazione $y = 3$ V F

b. i piani di equazione $x = 1$ e $y = -3$ si intersecano lungo una retta parallela all'asse y V F

c. il punto $P(1, 0, 1)$ appartiene alla sfera di centro l'origine e raggio 2 V F

d. i due piani di equazioni $2x - 3y - z - 1 = 0$ e $4x + 3y - z - 5 = 0$ sono perpendicolari V F

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
CALCOLO COMBINATORIO

Problemi

1 Considera l'insieme A dei numeri naturali aventi cinque cifre; determina:

a. la cardinalità dell'insieme A;

b. il numero degli elementi di A costituiti da cifre tutte distinte;

c. il numero degli elementi di A che hanno almeno due cifre uguali;

d. il numero degli elementi di A costituiti da cifre distinte, che non contengono né la cifra 5 né la cifra 6.

2 Si vogliono scegliere 5 persone da un gruppo di 8 donne e 6 uomini, per costruire un comitato rappresentativo di una associazione. Determina:

a. in quanti modi è possibile costituire la delegazione;

b. in quanti modi è possibile costituire la delegazione, se si vuole che sia costituita unicamente da donne;

c. in quanti modi è possibile costituire la delegazione, se si vuole che i suoi membri siano costituiti da persone dello stesso sesso;

d. in quanti modi è possibile costituire la delegazione, se si vuole che contenga almeno un uomo e almeno una donna.

Quesiti

3 Vero o falso?

a. $\binom{100}{99} = 100$ V F

b. $\frac{8!}{4!} = 2!$ V F

c. $D_{7,4} = 28$ V F

d. $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$ V F

e. $6! : 3! = 5!$ V F

4 Risolvi l'equazione $3\binom{n-2}{n-4} = \binom{n-1}{n-3}$.

5 Ci sono dieci ambasciatori senza sede e tre posti da coprire: Città del Vaticano, Parigi e Vienna. In quanti modi possibili i tre ambasciatori possono essere assegnati?

6 Un professore di storia non chiede le date degli eventi, ma è molto severo nella richiesta dell'ordine cronologico: per ogni domanda elenca cinque fatti e chiede che essi siano ordinati cronologicamente. Quante sono le risposte possibili per ogni domanda?

7 Quanti numeri di 6 cifre è possibile costruire, aventi cifre tutte diverse da zero e multiple di 3?

8 L'insegnante di matematica vuole interrogare tre studenti, tra cui Paolo. Se la classe è di 24 alunni, quanti sono i possibili gruppi di interrogati?

9 Una password è costituita da cinque caratteri, ciascuno dei quali può essere una delle 21 lettere dell'alfabeto italiano oppure una delle cifre da 0 (incluso) a 9 (incluso). Quante password diverse si possono formare che iniziano con una vocale e terminano con un numero dispari, aventi caratteri tutti distinti?

10 Ogni colonna della schedina del Totocalcio è costituita da 13 caselle, ciascuna delle quali deve essere riempita con uno dei tre simboli 1, 2 o X. In quanti modi diversi si può riempire una colonna con sei segni 1, quattro segni X e tre segni 2?

11 Un magazzino di una casa editrice ha in giacenza 10 titoli di libri (il numero di copie di ciascuno è più che sufficiente a far fronte a qualunque richiesta). In quanti modi possibili quel magazzino può ricevere un ordine di 15 volumi?

12 Un ristorante offre 5 primi, 7 secondi e 10 tipi di vino. Per un matrimonio si richiedono un tris di primi, 2 secondi e 2 vini. L'antipasto è a buffet e come dessert c'è la torta nuziale. In quanti modi diversi si può predisporre il menu?

Le soluzioni sono in fondo al volume

VERSO L'ESAME
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Problemi

1 Un dado cubico regolare ha una faccia bianca, due facce nere e tre facce rosse. Si lancia il dado consecutivamente per due volte e, in ciascuno dei due lanci, si prende nota del colore della faccia ottenuta. Calcola la probabilità:

a. che le due facce ottenute siano entrambe nere;
b. che le due facce ottenute siano entrambe bianche o entrambe nere;
c. che le due facce ottenute abbiano lo stesso colore;
d. che le due facce ottenute abbiano colori differenti;
e. che le due facce ottenute siano entrambe bianche, sapendo che hanno lo stesso colore.

2 Un'urna contiene 20 palline bianche e 10 palline nere. Si estrae a caso una pallina dall'urna, quindi:

- se la pallina estratta è bianca, si rimette nell'urna e se ne aggiungono altre n bianche;
- se la pallina estratta è nera, si rimette la pallina estratta nell'urna e se ne aggiungono altre n nere.

Si estrae quindi una seconda pallina dall'urna.

a. Calcola la probabilità che sia la prima sia la seconda pallina estratta siano bianche.
b. Calcola la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca.
c. La seconda pallina estratta è bianca. Qual è la probabilità che anche la prima pallina estratta sia bianca?
d. Qual è la probabilità che le due palline estratte siano di colori differenti?
e. Qual è il minimo valore di n per cui la probabilità di estrarre due palline di colori differenti è inferiore al 10%?

Quesiti

3 Ho in tasca un mazzo con 10 chiavi, fra cui quella di casa, indistinguibili l'una dall'altra. Prendo a caso una chiave; qual è la probabilità che non sia quella di casa?

4 Qual è la probabilità che un numero naturale di due cifre preso a caso abbia la cifra delle decine doppia di quella delle unità?

5 Da un mazzo di 40 carte si tolgono l'Asso di fiori, il 7 di quadri, il Re di picche e tutti i 2. Successivamente si estrae una carta. Calcola la probabilità che questa sia:

a. un Re;
b. un Asso;
c. una carta di fiori;
d. una figura.

6 Supponiamo che l'ordine con cui sei congressisti devono prendere la parola sia stabilito per sorteggio e che ciascuno prenda la parola una e una sola volta. Qual è la probabilità che tale ordine coincida con quello alfabetico crescente (dalla A alla Z)?

7 Un sacchetto contiene 2 palline blu, 4 rosa e 3 nere. Si estrae una pallina. Qual è la probabilità che essa sia blu o nera?

8 Un sacchetto contiene 2 palline blu, 4 rosa e 3 nere. Si estrae una pallina, la si rimette nell'urna e si esegue ancora un'estrazione. Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia blu o la seconda estratta sia nera?

9 Un'urna contiene 20 palline, di cui 4 rosse, 10 blu e 6 verdi. Si estraggono simultaneamente 5 palline dall'urna. Qual è la probabilità che tra le palline estratte non ce ne sia nessuna rossa?

10 Una ditta ha due fornitori di componenti per personal computer. Il 40% dei componenti viene acquistato dal fornitore A e il restante 60% dal fornitore B. In base alle passate esperienze, si stima che l'8% dei componenti acquistati dal fornitore A e il 6% dei componenti acquistati dal fornitore B sono difettosi.

a. Scelto a caso un componente, qual è la probabilità che sia difettoso?
b. Avendo constatato che il componente scelto è difettoso, qual è la probabilità che provenga dal fornitore A?

11 Si lancia un dado regolare per 3 volte. Stabilisci qual è la probabilità:

a. che esca 6 almeno una volta;
b. che esca 6 al massimo una volta.

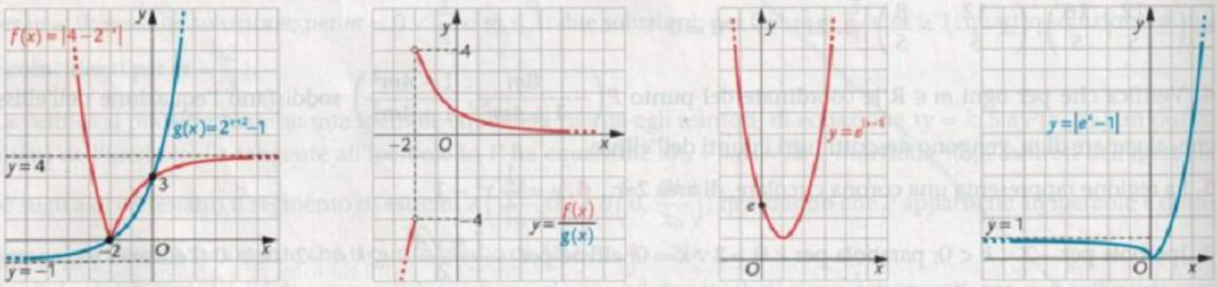
12 Si lancia un dado regolare a sei facce. Stabilisci se i due eventi A: «esce un numero dispari» e B: «esce un numero maggiore o uguale a 3» sono indipendenti.

Le soluzioni sono in fondo al volume

FUNZIONI ED EQUAZIONI ESPONENZIALI

Verso l'esame

1. a. $\mathbb{R} - \{0, 2\}$; b. $y > 0$ per $x < 0 \vee 2 < x < 3$; $y = 0$ per $x = 3$; $y < 0$ per $0 < x < 2 \vee x > 3$; c. $x < 0 \vee 2 < x \leq 3$;
d. $y = g(x) = -2 - \dfrac{2^{x+3} - 4^x}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}$; e. Non hanno punti di intersezione, perché l'equazione $f(x) = g(x)$ non ha soluzioni.
2. a. *Vedi* la fig. a; Dominio $= \mathbb{R}$, Immagine $= [0, +\infty)$; b. due soluzioni per $0 < k < 4$, una soluzione per $k = 0 \vee k \geq 4$;
c. $a = 2$, $b = -1$; d. *vedi* la fig. b; Dominio $= \mathbb{R}$, Immagine $= (-1, +\infty)$; la disequazione è soddisfatta per $x \leq 0$;
e. l'espressione analitica della funzione $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si può scrivere nella forma: $y = \begin{cases} -2^{-x} & \text{se } x < -2 \\ 2^x & \text{se } x > -2 \end{cases}$;
Dominio $= \mathbb{R} - \{-2\}$, Immagine $= (-\infty, -4) \cup (0, 4)$ **3.** Non è definita l'espressione a perché le potenze con esponente irrazionale sono definite solo per basi positive, mentre $1 - \sqrt{2} < 0$. **4.** $x \geq 6$ **5.** $a < -3 \vee a > -1$ **6.** $-10 \leq x \leq 10 \wedge x \neq 9$
7. $(0,1)^3 < (0,1)^{2\sqrt{2}} < (0,1)^{\sqrt{7}} < (\sqrt{7})^{0,1} < (2\sqrt{2})^{0,1} < 3^{0,1}$ **8.** $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ **9.** $a \leq -2 \vee a \geq 2$
10. $-1 < x \leq 1 \wedge x \neq \alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$ **11.** $x \leq -1 \vee x \geq 1$ **12.** $(f \circ g)(x) = e^{|x-1|}$ e $(g \circ f)(x) = |e^x - 1|$; *vedi* le figg. c, d

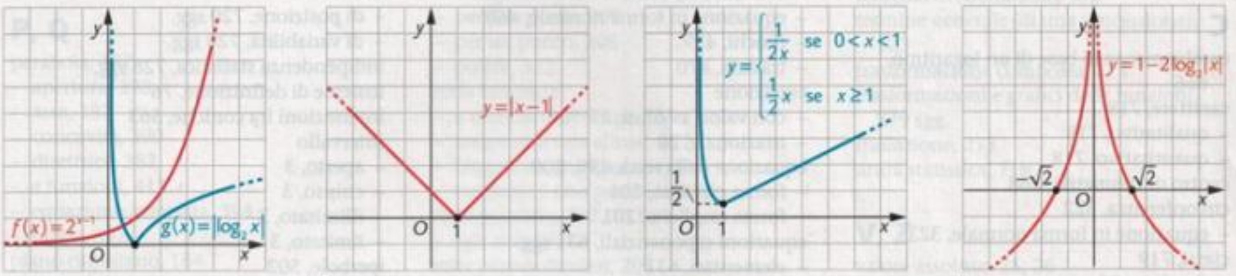


a b c d

FUNZION, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Verso l'esame

1. a. Dominio $= (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; b. $f < 0$ per ogni $x \in D$, il grafico non interseca gli assi cartesiani in alcun punto; c. funzione pari; d. $(6, -6)$; e. le funzioni non sono uguali, perché non hanno lo stesso dominio.
2. a. $D_f = \mathbb{R}$; $I_f = \mathbb{R}^+$; $D_g = \mathbb{R}^+$, $I_g = \mathbb{R}_0^+$; *vedi* la fig. a; b. una soluzione, appartenente all'intervallo $(0, 1)$; c. $y = 1 + \log_2 x$, il suo grafico è il simmetrico di $y = 2^{x-1}$ rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante; d. $(g \circ f)(x) = |x - 1|$, *vedi* la fig. b; e. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2}x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, *vedi* la fig. c.

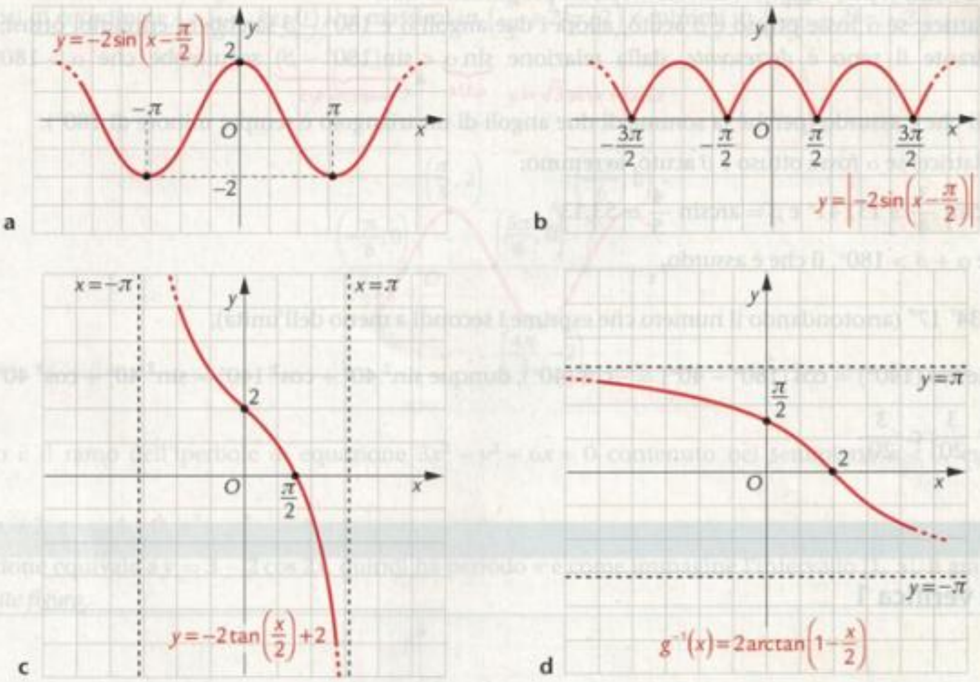


a b c d

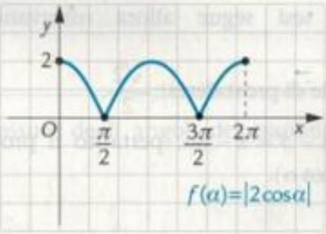
3. $x \leq -4 \vee x \geq 8$ **4.** $0 < x \leq e$, con $x \neq 1$.
5. Se per assurdo fosse $\log_5 6 = \dfrac{p}{q}$, con p e q numeri naturali diversi da zero e primi fra loro, allora dovrebbe essere $5^{\frac{p}{q}} = 6$ e quindi $5^p = 6^q$, ossia $5^p = 2^q \cdot 3^q$. Ciò è assurdo, per l'unicità della scomposizione in fattori primi garantita dal teorema fondamentale dell'aritmetica. **6.** $\dfrac{1}{3}$ **7.** Se $k \leq 0$, allora $D = \mathbb{R}$; se $k > 0$, allora $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\ln k\right\}$.
8. $\ln\dfrac{1}{\pi} < \log_\pi e < \log_\pi 2\pi - \log_\pi 2 < \ln \pi$ **9.** $y = 1 - 2\log_2|x|$; dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$; immagine $= \mathbb{R}$; zeri: $\pm\sqrt{2}$.
Vedi la fig. d. **10.** -2 **11.** $a = 1 \wedge b = -2$ **12.** Circa 251 984

Verso l'esame

1. **a.** *Vedi* la fig. a; la funzione è periodica di periodo 2π; **b.** *vedi* la fig. b; la funzione è periodica di periodo π; **c.** poiché il grafico della funzione f è simmetrico rispetto all'asse y, il grafico di $y = f(|x|)$ coincide con quello della funzione f: si tratta perciò ancora di una funzione periodica di periodo 2π; **d.** $a = -2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$, *vedi* la fig. c; **e.** la funzione g è invertibile nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ e la sua inversa è la funzione $g^{-1}(x) = 2\arctan\left(1 - \frac{x}{2}\right)$; *vedi* la fig. d.



2. **a.** γ_1 è la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$; **b.** γ_2 è la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 1$; **c.** Area $= \frac{2}{3}$; **d.** $f(\alpha) = 2|\cos\alpha|$, *vedi la seguente figura;* **e.** il vertice ha coordinate $(\sin\alpha, \sin^2\alpha - 1)$, quindi le equazioni parametriche del luogo sono $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \sin^2\alpha - 1 \end{cases}$, con $\alpha \in [0, 2\pi]$; sostituendo x al posto di $\sin\alpha$ nella seconda equazione otteniamo l'equazione $y = x^2 - 1$: il luogo descritto è l'arco di questa parabola per cui $-1 \leq x \leq 1$ (il luogo non è tutta la parabola poiché al variare di $\alpha \in [0, 2\pi]$ i valori assunti da $x = \sin\alpha$ sono soltanto quelli appartenenti all'intervallo $[-1, 1]$).



3. **a.** Periodo $= \pi$; **b.** periodo $= 4\pi$; **c.** periodo $= 2$.

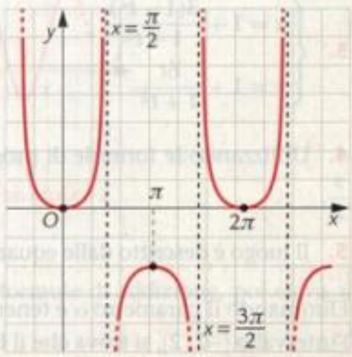
4. Puoi verificare per esempio che ciascuno dei due membri è uguale a $\frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x}$.

5. Sia $P(x, 4-x^2)$ un punto appartenente all'arco AB di parabola. Ricordando il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta, abbiamo che la tangente di $P\widehat{A}B$ è il coefficiente angolare della retta PA, mentre la tangente di $P\widehat{B}A$ è l'opposto del coefficiente angolare di PB (perché?). Ne deduciamo che:

$$\tan P\widehat{A}B + \tan P\widehat{B}A = m_{AP} - m_{BP} = (2-x) - (-x-2) = 4$$

6. Per esempio, $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

7. *Vedi la figura qui a fianco*; dominio $= \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$; immagine $= (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$



8. **a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b.** $\frac{\pi}{3}$; **c.** $\frac{1}{3}$

9. La risposta corretta è la prima: α è acuto e β è ottuso. Ovviamente l'ultima risposta è falsa. Per scartare la seconda (e quindi anche la terza) si può ragionare in vari modi; ne proponiamo due:

a. senza calcolatrice: se α fosse ottuso e β acuto, allora i due angoli α e $180° - \beta$ sarebbero entrambi ottusi; poiché nel secondo quadrante il seno è *decrescente*, dalla relazione $\underbrace{\sin\alpha}_{=3/4} < \underbrace{\sin(180° - \beta)}_{=\sin\beta = 4/5}$ seguirebbe che $\alpha > 180° - \beta$, ossia $\alpha + \beta > 180°$, il che è assurdo (perché la somma di due angoli di un triangolo è sempre minore di 180°).

b. con la calcolatrice: se α fosse ottuso e β acuto, avremmo:

$$\alpha = \pi - \arcsin\frac{3}{4} \simeq 131{,}41° \text{ e } \beta = \arcsin\frac{4}{5} \simeq 53{,}13°$$

quindi sarebbe $\alpha + \beta > 180°$, il che è assurdo.

10. $\frac{5\pi}{7}$, $128°\ 34'\ 17''$ (arrotondando il numero che esprime i secondi a meno dell'unità).

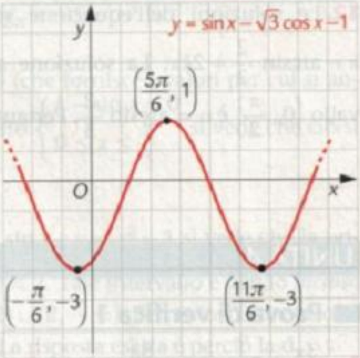
11. Osserva che $\cos(140°) = \cos(180° - 40°) = -\cos(40°)$, dunque $\sin^2 40° + \cos^2 140° = \sin^2 40° + \cos^2 40° = 1$.

12. **a.** $\frac{3}{20}$; **b.** $-\frac{3}{20}$; **c.** $\frac{3}{20}$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE

Verso l'esame

1. **a.** $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$, *vedi la figura a fianco;*



b. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$;

c. $\left(\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \sqrt{2} - 1\right)$ e $\left(\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \sqrt{2} - 1\right)$;

d. $m = 5$; **e.** $\left(\frac{\pi}{6}, -2\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}, -3\right)$; $\left(\arccos\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right), \frac{1 + \sqrt{13}}{5}\right)$;

$\left(2\pi - \arccos\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right), \frac{1 - \sqrt{13}}{5}\right)$

2. **a.** $P(0, -1)$, $Q(-2, 3)$; **b.** $\alpha \neq k\pi$; **c.** $\left(\frac{\cos^2\alpha \pm \sqrt{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}, 0\right)$; **d.** $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$;

e. l'equazione cartesiana del luogo si può ricavare eliminando il parametro α tra le equazioni del sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} & \longleftarrow \text{ascissa del vertice} \\ y = x^2\sin^2\alpha - 2x\cos^2\alpha - 1 & \longleftarrow \text{equazione della parabola} \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ y = x^2\sin^2\alpha - 2x(1 - \sin^2\alpha) - 1 \end{cases}$$

Per eliminare il parametro α basta ricavare dalla prima equazione $\sin^2\alpha$ in funzione di x e sostituire nella seconda; si ottiene così che l'equazione cartesiana del luogo è $y = -\frac{x^2}{x+1} - 1$. Di questa curva la parte che rappresenta il luogo dei vertici delle parabole è quella per $x \geq 0$ (osserva infatti che al variare di α l'ascissa del vertice assume tutti e soli i valori reali non negativi).

3. Bisogna determinare k in modo che l'equazione $\sin x + \cos x - k = 0$ non abbia soluzioni reali. Posto $\sin x = Y$ e $\cos x = X$, il problema equivale a determinare k in modo che il sistema $\begin{cases} Y + X - k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ non abbia soluzioni reali. Ciò si verifica per $k < -\sqrt{2} \vee k > \sqrt{2}$.

4. Dominio $= \mathbf{R} - \{k\pi\}$; zeri: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

5. Le condizioni di esistenza sono $\alpha \neq k\pi$. L'identità si può provare operando le seguenti trasformazioni sul secondo membro (ricorda le proprietà dei logaritmi):

$$\frac{1}{2}\ln|1 - \cos 2\alpha| - \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right| = \frac{1}{2}\ln\sin^2\alpha = \ln|\sin\alpha|$$

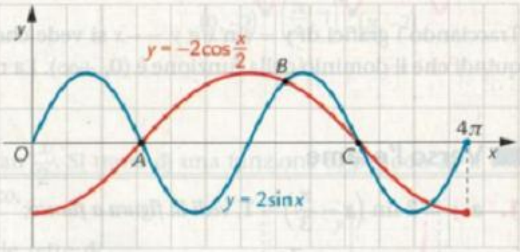
6. $k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi$ **7.** $t = 3$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\arctan 2 + k\pi$

8. La funzione è definita purché sia $\pi \sin x - 2x \neq 0$, ossia $\sin x \neq \frac{2x}{\pi}$. Tracciando i grafici di $y = \sin x$ e $y = \frac{2x}{\pi}$, osservando che la retta passa per i punti della sinusoide di ascisse $\pm\frac{\pi}{2}$, si vede che la condizione è verificata per $x \neq 0$ e $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$. La risposta esatta quindi è la d.

9. *Vedi* la parte di teoria. Due esempi possono essere: $\sin x - \cos x - 2 = 0$ (priva di soluzioni) e $\sin x - \cos x + 1 = 0$ $\left(\text{con soluzione } x = \frac{3\pi}{2}\right)$.

10. *Vedi* i grafici nella *figura qui a fianco.*

Si trova che $A(\pi, 0)$; $B\left(\frac{7\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$; $C(3\pi, 0)$; $D\left(\frac{11\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$.



11. a. $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$; b. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \alpha = \pi + 2k\pi$

12. Le soluzioni dell'equazione sono $\arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi$ e $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi$. La soluzione appartenente all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$. Pertanto l'equazione della retta è $y = x\tan 2\alpha$, ossia $y = 4x\sqrt{5}$.

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Verso l'esame

1. a. Dominio di $f = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$, dominio di g: $\mathbb{R}$;

b. zeri di f: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi \vee x = 2\pi + 2k\pi$; zeri di g: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$;

c. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$, con $x \neq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$;

d. dominio $= \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$,

zeri: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + \arcsin\frac{1}{14} + 2k\pi \vee x = 2\pi - \arcsin\frac{1}{14} + 2k\pi$;

e. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi + \arcsin\frac{1}{14} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - \arcsin\frac{1}{14} + 2k\pi$

2. a. $C_1(\sin\alpha, \cos\alpha)$ e $r_1 = 3$; $C_2(3\sin\alpha, \cos\alpha)$ e $r_2 = 2$; b. $x^2 + y^2 = 1$; c. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$;

d. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$;

e. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \alpha = \arcsin\frac{5}{8} + 2k\pi \vee \alpha = \pi - \arcsin\frac{5}{8} + 2k\pi$; f. misura della corda $= \frac{3}{2}\sqrt{7}$

3. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

4. Dominio $= -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq k\pi \vee \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$; zeri: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \arctan 2 + k\pi$

5. $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

6. Se $a > 1$: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$; se $0 < a < 1$: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

7. *Vedi* il Paragrafo 1; gli esempi possono essere: a. $\sin x \geq 2$; b. $\sin x \geq 1$; c. $\sin x \geq -1$

8. 1 soluzione per $k \leq 0 \vee k \geq \frac{3}{2}$ **9.** $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

10. Occorre determinare i valori di k per cui l'equazione $\cos 2x - k\cos x + 2k = 0$ è priva di soluzioni. Ponendo $\cos x = X$, si trova che ciò equivale a determinare k in modo che il sistema $\begin{cases} Y = 2X^2 - 1 \\ Y = kX - 2k \\ -1 \leq X \leq 1 \end{cases}$ non abbia soluzioni. I valori di k cercati sono: $k < -1 \vee k > 8 - \sqrt{56}$.

11. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

12. Confrontando i grafici di $y = \cos x$ e $y = x^2$ si vede che la funzione **a** è definita in un intervallo del tipo $[-\alpha, \alpha]$ con $0 < \alpha < 1$; imponendo che i radicandi delle le funzioni **b** e **d** siano maggiori o uguali a zero, si trova che tali funzioni sono definite a condizione che $\cos x \geq 0$. Per esclusione si può dedurre che la risposta esatta è dunque la **c**. Ciò si può provare anche direttamente, confrontando i grafici di $y = \cos x$ e $y = -x^2$: si vede così che la disequazione $\cos x \geq -x^2$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

TRIGONOMETRIA

Verso l'esame

1. **a.** $y = 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 1$; **b.** $y = 2\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$; il tratto relativo al problema è quello per $0 < x < \frac{3\pi}{4}$; **c.** $x = \frac{5\pi}{24} \vee x = \frac{13\pi}{24}$; **d.** massimo per $x = \frac{3\pi}{8}$; **e.** in un sistema di riferimento rispetto a cui $A(0, \sqrt{2}+1)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, risulta $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

2. **a.** $y = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; il tratto relativo al problema è quello per $0 < x < \pi - \arctan 2$; **b.** il massimo valore di y è $2\sqrt{2}$ ed è assunto per $x = \frac{\pi}{4}$; **c.** due soluzioni per $2 < k \leq 2\sqrt{2}$ (per $k = 2\sqrt{2}$ le due soluzioni coincidono) e una soluzione per $\frac{2\sqrt{5}}{5} < k \leq 2$; **e.** in un sistema di riferimento rispetto a cui $A(0,4)$, $B(-2,0)$ e $C(2,0)$, l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3. $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \arccos\sqrt{\frac{7}{8}}$; nel primo caso si ottiene un triangolo di perimetro $(2+\sqrt{3})l$, nel secondo un triangolo di perimetro $\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$.

4. $14\,a$; $6a\sqrt{2}$; $10a$

5. L'area A del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$; poiché per il teorema dei seni $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, è anche: $A = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$. La tesi segue ora dal fatto che la misura h dell'altezza richiesta è data dalla formula $h = \frac{2A}{a}$.

6. Nei casi **a** e **c** non esiste alcun triangolo che soddisfa le condizioni richieste perché non è soddisfatta la disuguaglianza triangolare; nel caso **b**, applicando il teorema dei seni si avrebbe $\sin\beta = \frac{5}{3}\sin 41°$, ma $\frac{5}{3}\sin 41° > 1$, quindi anche questo caso è da escludere; solo nel caso **d** esiste un triangolo che soddisfa le condizioni richieste; si trova che $\beta = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 20{,}70°$, $\gamma = 135° - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 114{,}30°$ e $c = \sqrt{2} + \sqrt{14} \simeq 5{,}16$.

7. Conosci almeno tre formule: la formula nota dalla geometria euclidea, la formula vista nel Paragrafo 2 di questa Unità e la formula di Erone;
a. 48 cm^2 (conviene utilizzare la formula classica della geometria euclidea);
b. 24 cm^2 (conviene utilizzare la formula trigonometrica);
c. $12\sqrt{5}$ cm^2 (conviene utilizzare la formula di Erone).

8. Posto $A\hat{O}D = 2\alpha$ e $B\hat{O}C = 2\beta$, si ricava che la misura di CD è $2r\cos(\alpha+\beta)$; determinando le funzioni goniometriche di α e β (ricorda il teorema della corda) e applicando la formula di addizione si ricava che $\overline{CD} = \frac{r}{4}(3\sqrt{5}-1)$.

9. Ponendo $A\hat{B}C = x$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si ricava che il perimetro del triangolo è espresso della formula $2r(1+\sin x+\cos x)$ ossia $2r\left[1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$. Il massimo è raggiunto quando $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1$, cioè per $x = \frac{\pi}{4}$. Se ne deduce che il triangolo inscritto di perimetro massimo è quello isoscele.

10. $\frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3}$

11. Ponendo $B\hat{A}C = x$, si giunge all'equazione $\frac{1}{\cos x} + \cos x = \frac{7}{2}\tan x$; il problema ha una sola soluzione, $x = \frac{\pi}{6}$.

12. Ponendo $P\hat{A}C = x$, con $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, e applicando il teorema della corda si ricava che $\overline{PB} = 2r\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $\overline{PA} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ e $\overline{PC} = 2r\sin x$.
Per provare la tesi, basta quindi provare la semplice identità: $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \sin x$.

MISURE DI SUPERFICI E VOLUMI

Verso l'esame

1. a. Si verifica che l'altezza ha misura $6a$, da cui la tesi; b. $9(\sqrt{3}+\sqrt{39})a^2$; c. $3a\sqrt[3]{4}$; d. $\frac{6}{11}(6+\sqrt{3})a$; e. $4a$.

2. a. Mediante il teorema di Pitagora si ricava che $\overline{BG} = 5a$. Si osserva quindi che $\overline{AB} = \overline{BG}$, ovvero il triangolo ABG è isoscele sulla base AG. Il punto O, intersezione delle due diagonali AG e BH, è il punto medio di queste ultime; pertanto BO è la mediana relativa alla base AG del triangolo isoscele ABG, quindi è anche altezza. Essendo BO perpendicolare ad AG, ne segue che le due diagonali AG e BH sono perpendicolari.
c. La sezione del parallelepipedo con il piano è il rettangolo che ha come vertici B, C, M e il punto medio N dello spigolo HG (per dimostrare che la sezione è un rettangolo si può provare anzitutto che la sezione è un parallelogramma, poi osservare che la retta BC è perpendicolare alla retta BM, quindi il parallelogramma ha un angolo retto ed è perciò un rettangolo), l'area del rettangolo sezione è $\frac{3}{2}a^2\sqrt{89}$.
d. Il parallelepipedo resta diviso in due prismi, uno di volume $15a^3$ e uno di volume $45a^3$.
e. $\frac{20a\sqrt{89}}{89}$
f. La sfera circoscritta al parallelepipedo ha centro nel centro del parallelepipedo, quindi il suo raggio è uguale alla metà della diagonale, perciò misura $\frac{5}{2}a\sqrt{2}$, l'area della sfera circoscritta è $50\pi a^2$, il volume è $\frac{125}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

3. $\frac{4}{3}r$

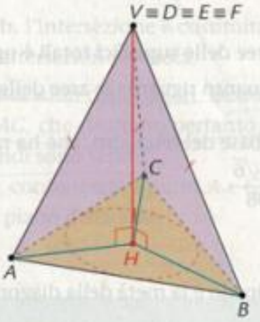
4. Il cono ha altezza di misura $6a$ e raggio di base di misura $2a$. Lo spigolo di base della piramide inscritta nel cono ha misura uguale al lato di un quadrato inscritto nel cerchio di base del cono, mentre l'altezza della piramide coincide con l'altezza del cono. Si trova così che lo spigolo di base della piramide misura $2a\sqrt{2}$ e si deduce che il volume della piramide è $16a^3$.

5. Per esempio: un cilindro di raggio di base 3 cm e altezza 4 cm, un cono di raggio di base 3 cm e altezza 12 cm, una sfera di raggio 3 cm.

6. Volume $= \frac{\sqrt{2}}{6}cm^3$, Area $= (1+\sqrt{3})cm^2$

7. Sia H il piede dell'altezza condotta da C ad AB. Ponendo $\overline{AH} = a_1$, $\overline{HB} = a_2$, $\overline{CH} = h$ e $\overline{AB} = a$, si verifica che $V_1 = \frac{1}{3}\pi h^2 a$ e $V_2 = \frac{2}{3}\pi h^2 a$, quindi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

8. Sia V il vertice della piramide e H il piede dell'altezza relativa alla base ABC. Poiché $VA \cong VB \cong VC$, i triangoli rettangoli VHA, VHB e VHC sono congruenti: in particolare ne segue che $AH \cong BH \cong CH$. Pertanto H deve essere il circocentro del triangolo ABC. Ma il triangolo ABC è equilatero e in un triangolo equilatero il circocentro e l'incentro coincidono: dunque la piramide è retta e quindi anche regolare (poiché la base è un poligono regolare).



Da quanto mostrato segue anche che H deve coincidere con il baricentro del triangolo, quindi la misura di AH è $\frac{2}{3}$ della misura delle altezze del triangolo ABC: $\overline{AH} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHV si ottiene $\overline{VH} = 2\sqrt{13}$. Il volume della piramide è $6\sqrt{39}$ cm³.

9. Un parallelogramma resta diviso dalle due diagonali in quattro triangoli, tutti tra loro equivalenti. Ne segue che le basi dei quattro prismi sono equivalenti. Pertanto i quattro prismi, avendo le basi equivalenti e le altezze congruenti, hanno lo stesso volume.

10. Si ricava che il cilindro equilatero inscritto nella sfera ha raggio $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ e altezza $r\sqrt{2}$. Il rapporto tra il volume del cilindro è quello della sfera è $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

11. $36(1+\sqrt{2})$ cm²

12. $84\pi a^3$

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Verso l'esame

1. **a.** $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right), K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$; **b.** $4x + 2y + 2z - 5 = 0$; **c.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$; **d.** $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$; **e.** $\frac{\sqrt{102}}{12}$

2. **a.** $\frac{1}{3}$; **b.** area $= \frac{\sqrt{6}}{2}$; **c.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$; **d.** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = k + 1 \\ z = k \end{cases}$; **e.** $2x + y - z - 1 = 0$;

g. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; **h.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + \frac{10}{3} = 0$; **i.** centro di coordinate $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, raggio $= \sqrt{2}$

3. Si verifica che $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{17}$, mentre $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$. Il piede dell'altezza relativa alla base è il punto medio di AB, quindi ha coordinate $(2, 1, -1)$.

4. **a.** Una possibile rappresentazione parametrica è per esempio: $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$; **b.** $\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$

5. $2x - y - 3z + 13 = 0$ **6.** $k = -4$ **7.** La retta appartiene al piano dato. **8.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

9. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 9 = 0$

10. Il piano è tangente alla superficie sferica perché il centro di quest'ultima, ossia il punto di coordinate $(1, -1, 0)$, ha distanza dal piano uguale al raggio (cioè uguale a $2\sqrt{3}$).

11. Sghembe **12.** V, F, F, V

CALCOLO COMBINATORIO

Verso l'esame

1. a. $\frac{1}{9}$; b. $\frac{5}{36}$; c. $\frac{7}{18}$; d. $\frac{11}{18}$; e. $\frac{1}{14}$ **2.** a. $\frac{2(20+n)}{3(30+n)}$; b. $\frac{2}{3}$; c. $\frac{20+n}{30+n}$; d. $\frac{40}{3(30+n)}$; $n = 104$ **3.** $\frac{9}{10}$

4. I numeri naturali di due cifre con la cifra delle decine doppia di quella delle unità sono 21, 42, 63 e 84. Se ne deduce che la probabilità richiesta è uguale a $\frac{2}{45}$.

5. a. $\frac{1}{11}$; b. $\frac{1}{11}$; c. $\frac{8}{33}$; d. $\frac{1}{3}$

6. Ci sono $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ modi diversi in cui i congressisti possono prendere la parola, quindi la probabilità richiesta è $\frac{1}{720}$.

7. I due eventi «si estrae una pallina blu» e «si estrae una pallina nera» sono incompatibili, quindi la probabilità dell'evento «si estrae una pallina blu o nera» è uguale a: $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$.

8. Sia A l'evento «la prima pallina estratta è blu» e B l'evento «la seconda pallina estratta è nera»; si verifica che $p(A) = \frac{2}{9}$, $p(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $p(A \cap B) = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 9} = \frac{2}{27}$. Se ne deduce che $p(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{13}{27}$.

9. $\frac{91}{323}$

10. a. 6,8%; b. $\frac{8}{17} \simeq 47\%$

11. a. Conviene utilizzare il passaggio all'evento contrario: si deduce così che la probabilità richiesta è uguale a $1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$.

b. Calcolare la probabilità dell'evento «esce 6 al massimo una volta » equivale a calcolare la probabilità dell'evento $A \cup B$, essendo A l'evento «non esce mai 6» e B l'evento «esce 6 esattamente una volta» . Poiché A e B sono incompatibili, deduciamo che la probabilità dell'evento $A \cup B$ è uguale a

$$p(A) + p(B) = \frac{5^3}{6^3} + \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} = \frac{25}{27}$$

12. Risulta $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{2}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Poiché $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, i due eventi A e B sono indipendenti.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Verso l'esame

1. a. $\frac{1}{9}$; b. $\frac{5}{36}$; c. $\frac{7}{18}$; d. $\frac{11}{18}$; e. $\frac{1}{14}$ **2.** a. $\frac{2(20+n)}{3(30+n)}$; b. $\frac{2}{3}$; c. $\frac{20+n}{30+n}$; d. $\frac{40}{3(30+n)}$; $n = 104$ **3.** $\frac{9}{10}$

4. I numeri naturali di due cifre con la cifra delle decine doppia di quella delle unità sono 21, 42, 63 e 84. Se ne deduce che la probabilità richiesta è uguale a $\frac{2}{45}$.

5. a. $\frac{1}{11}$; b. $\frac{1}{11}$; c. $\frac{8}{33}$; d. $\frac{1}{3}$

6. Ci sono $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ modi diversi in cui i congressisti possono prendere la parola, quindi la probabilità richiesta è $\frac{1}{720}$.

7. I due eventi «si estrae una pallina blu» e «si estrae una pallina nera» sono incompatibili, quindi la probabilità dell'evento «si estrae una pallina blu o nera» è uguale a: $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$.

8. Sia A l'evento «la prima pallina estratta è blu» e B l'evento «la seconda pallina estratta è nera»; si verifica che $p(A) = \frac{2}{9}$, $p(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $p(A \cap B) = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 9} = \frac{2}{27}$. Se ne deduce che $p(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - \frac{2}{27} = \frac{13}{27}$.

9. $\frac{91}{323}$

10. a. 6,8%; b. $\frac{8}{17} \simeq 47\%$

11. a. Conviene utilizzare il passaggio all'evento contrario: si deduce così che la probabilità richiesta è uguale a $1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$.

b. Calcolare la probabilità dell'evento «esce 6 al massimo una volta » equivale a calcolare la probabilità dell'evento $A \cup B$, essendo A l'evento «non esce mai 6» e B l'evento «esce 6 esattamente una volta» . Poiché A e B sono incompatibili, deduciamo che la probabilità dell'evento $A \cup B$ è uguale a

$$p(A) + p(B) = \frac{5^3}{6^3} + \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} = \frac{25}{27}$$

12. Risulta $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{2}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Poiché $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, i due eventi A e B sono indipendenti.