

Matematica - Compiti delle vacanze

Classe 4 A Liceo Scientifico.

Testi di riferimento

Sasso – Zanone; Colori della Matematica edizione BLU - Seconda edizione - Volume 3β; Edizioni Petrini.

Sasso – Zanone; Colori della Matematica edizione BLU - Seconda edizione - Volume 4β; Edizioni Petrini.

Volume 3

Tema A: unità 2: le funzioni

Tema D: unità 12-13: funzioni esponenziali e logaritmiche

Svolgere le prove dal titolo: “Verso l’esame: problemi” e “Verso l’esame: autoverifica” che trovate al termine delle unità indicate per il ripasso.

Volume 4

Tema F: in particolare le unità riguardanti le funzioni goniometriche e la soluzione di equazioni e disequazioni goniometriche (unità da 1 a 4)

Tema G: numeri complessi

Tema H: geometria analitica dello spazio

Svolgere le simulazioni di esame al termine dei temi F e H.

Equazioni e disequazioni con valori assoluti

- | | | | | | |
|-----------|------------------------------------|--|-----------|---------------------------------------|--|
| 2 | $\left \frac{x-2}{x} \right = 1$ | $[x = 1]$ | 11 | $ x^2 - 4x < 8x$ | $[0 < x < 12]$ |
| 3 | $ x^2 - 9 = 8x$ | $[x = 1, x = 9]$ | 12 | $x x+5 < 2x^2$ | $[x < 0 \vee x > 5]$ |
| 4 | $ x+2 = 5x-6 $ | $\left[x = 2, x = \frac{2}{3} \right]$ | 13 | $ x^2 - 4 - x - 2 \geq 0$ | $[x \leq -3 \vee x \geq -1]$ |
| 5 | $ 2x+1 + x-8 = x+7$ | $[\nexists x \in \mathbb{R}]$ | 14 | $ x+1 > 4x-2 + 2x$ | $\left[\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5} \right]$ |
| 6 | $\frac{2 x }{ x+2 } = x-1 $ | $\left[x = -1, x = 2, x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \right]$ | 15 | $ x-1 + 2x-3 > 1$ | $\left[x < 1 \vee x > \frac{5}{3} \right]$ |
| 7 | $ 5-4x \leq 3$ | $\left[\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right]$ | 16 | $\frac{3- x-1 }{ x^2-16 } \geq 0$ | $[-2 \leq x < 4]$ |
| 8 | $ 2x-1 > 5$ | $[x < -2 \vee x > 3]$ | 17 | $\frac{ x-3 }{x^2} < \frac{1}{ x-3 }$ | $\left[x > \frac{3}{2} \wedge x \neq 3 \right]$ |
| 9 | $ x-x^2 < 2$ | $[-1 < x < 2]$ | 18 | $\frac{ x-2 }{ x^2-3x -4} < 0$ | $[-1 < x < 4 \wedge x \neq 2]$ |
| 10 | $ x-1 -2 \leq 3$ | $[-4 \leq x \leq 6]$ | | | |

Equazioni e disequazioni irrazionali

- | | | |
|-----------|--|--|
| 2 | $\sqrt[3]{-x^3 + 36x^2 - 27x} = 3 - x$ | $[x = -1, x = 1]$ |
| 3 | $\sqrt{5x^3 + 3x} = x^2 + x $ | $[x = 0, x = 3]$ |
| 4 | $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-2}} = x$ | $[x = 0, x = 1 \pm \sqrt{2}]$ |
| 5 | $\sqrt{x-1} + \sqrt{1+x} = 2$ | $\left[x = \frac{5}{4} \right]$ |
| 6 | $\sqrt[3]{-1+7x} \leq x-1$ | $[-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4]$ |
| 7 | $\sqrt[3]{7x^3 - x + 2} \leq 2x$ | $[x \geq 1]$ |
| 8 | $\sqrt{x^2 + x - 2} \geq 2 - x$ | $\left[x \geq \frac{6}{5} \right]$ |
| 9 | $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq x - 6$ | $[x \leq 1 \vee x \geq 4]$ |
| 10 | $\sqrt{x^2 - 9} \leq 4 - x$ | $\left[x \leq -3 \vee 3 \leq x \leq \frac{25}{8} \right]$ |
| 11 | $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$ | $\left[-2 < x < \frac{4}{3} \right]$ |
| 12 | $\sqrt{2x+10} < 3x-5$ | $[x > 3]$ |
| 13 | $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - x \leq -2$ | $[x = 2]$ |
| 14 | $\sqrt{x} < 2 - \sqrt{x-2}$ | $\left[2 \leq x < \frac{9}{4} \right]$ |
| 15 | $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt[3]{x^3+1}$ | $[x = 0]$ |
| 16 | $\sqrt{x^2 - 4} < \sqrt[3]{x^3 - 6x}$ | $\left[-\frac{4\sqrt{3}}{3} < x \leq -2 \right]$ |

Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

- 2** $\frac{2\sqrt{3^x \cdot 9^x}}{3^{-x}} = 6\sqrt{3} \cdot 81^x$ $[x = -3]$
- 3** $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+3} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{-4x}{x+1}} = 0$ $[x = 1 \vee x = 3]$
- 4** $3^x - 3^{3-x} = 6$ $[x = 2]$
- 5** $2^x + 4 \cdot 2^x = 15$ $[x = \log_2 3]$
- 6** $6 \cdot 3^{2x} = 13 \cdot 6^x - 6 \cdot 2^{2x}$ $[x = -1 \vee x = 1]$
- 7** $\blacktriangleright 4 \cdot 2^x - 2^{1-x} + 2 > 0$ $[x > -1]$
- 8** $8^{x+1} - 8^{2x-1} > 30$ $\left[\frac{2}{3} \leq x \leq \log_8 60\right]$
- 9** $25 - 5^x < 25 \cdot 2^x - 10^x$ $[0 < x < 2]$
- 10** $\blacktriangleright 39\sqrt{3^{x-1}} - 13\sqrt[3]{9^{x+2}} \geq 0$ $[x \leq -5]$
- 11** $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} > \left(\frac{16}{9}\right)^{x+4}$ $\left[x < -\frac{7}{4}\right]$
- 12** $\blacktriangleright 3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^{x+1}$ $\left[x < \log_{\frac{2}{3}} 4\right]$
- 13** $3^{2x} - 3^x \leq 3^{x-2} - \frac{1}{9}$ $[-2 \leq x \leq 0]$
- 14** $2 + \log_2(x+1) = 2\log_4(x^2+7)$ $[x = 1 \vee x = 3]$
- 15** $3(\log_5 x)^2 + 2\log_5 x - 8 = 0$ $\left[x = \frac{1}{25} \vee x = 5\sqrt[3]{5}\right]$
- 16** $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 1$ $\left[x = \frac{e+1}{2+e}\right]$
- 17** $\log_3(3x+4) = 2\log_9(1-x) - 2$ $\left[x = -\frac{5}{4}\right]$
- 18** $\log_2(x^2-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ $\left[x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
- 19** $\blacktriangleright \log_2(2x+4) - 1 \geq \log_2(6-x)$ $[2 \leq x < 6]$
- 20** $\log_5(x+4) - \frac{1}{2} \geq \log_5 \sqrt{5} x$ $[0 < x \leq 1]$
- 21** $\log_2 x + \log_2(2x-3) > 1$ $[x > 2]$
- 22** $\log_{\frac{2}{3}}(2x-1) + 1 \geq \log_{\frac{2}{3}}(8-3x)$ $\left[\frac{1}{2} < x \leq 2\right]$
- 23** $\blacktriangleright \frac{3}{\log_2 x} \geq \log_2 x + 2$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{8} \vee 1 < x \leq 2\right]$
- 24** $\log_4 x + \frac{3}{\log_4 x} < 4$ $[0 < x < 1 \vee 4 < x < 64]$

Equazioni e disequazioni goniometriche

- 2** $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 1$ $\left[x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{17}{12}\pi + 2k\pi\right]$
- 3** $\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ $\left[x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$
- 4** $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 \leq 0$ $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$
- 5** $\blacktriangleright \sin x - \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \geq 0$, in $[0; 2\pi]$. $\left[\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi\right]$
- 6** $\blacktriangleright \operatorname{tg} x \geq \frac{1}{2 \cos x}$ $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$
- 7** $\frac{2 \cos^2 x - 1}{\operatorname{tg} x} < 0$, in $[0; 2\pi]$. $\left[\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{4}\pi < x < \pi \vee \frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{7}{4}\pi < x < 2\pi\right]$
- 8** $\blacktriangleright \begin{cases} 4 \sin^2 x - 3 \geq 0 \\ \operatorname{tg} x \geq 1 \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$
- 9** $\begin{cases} \sin x(2 \cos x - 1) \geq 0 \\ 2 \sin x + 1 < 0 \end{cases}$, in $[0; 2\pi]$. $\left[\frac{7}{6}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi\right]$

Funzioni

Calcola il dominio e studia il segno delle seguenti funzioni.

2  $y = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x^4 - 8x^2 + 16}$ [D:] $-\infty; -2 \cup]2; +\infty$; $y \geq 0; \forall x \in D$

3 $y = \sqrt{\frac{x^2 - x - 12}{|x| - 6}}$ [D:] $-\infty; -6 \cup]-3; 4 \cup]6; +\infty$; $y \geq 0; \forall x \in D$

4  $y = \ln(3 - \sqrt{x^2 - 16})$ [D:] $-5; -4 \cup]4; 5$; $y \geq 0; [-2\sqrt{5}; -4] \cup]4; 2\sqrt{5}]$

5 $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$, in $[0; 2\pi]$. [D:] $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi]$; $y \geq 0; \forall x \in D$

6 $y = \frac{8^x - 2^{x+2}}{\sqrt{2^x - 1}}$ [D:] $0; +\infty$; $y \geq 0;]1; +\infty[$

7  Data la funzione $y = \frac{x}{2-x}$, trova la sua inversa e rappresenta graficamente le due funzioni. $\left[y = \frac{2x}{x+1} \right]$

8 Disegna il grafico della funzione $y = 2 + e^{x-1}$ verificando che è invertibile e scrivi l'equazione della funzione inversa. [$y = 1 + \ln(x-2)$]

Rappresenta le seguenti funzioni e indica in quali intervalli sono crescenti e in quali sono decrescenti.

9 $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
[cresc. per $x > -1$; decr. per $x < -1$]

10 $y = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$
[sempre cresc.]

Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

12  $y = \frac{\sqrt{4-|x|}}{x^3 - x}$

14 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

16 $y = \frac{\ln(1-x^2)}{\sin 2x}$

18 $y = \frac{2}{e^x + 1} - 1$

13 $y = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

15 $y = \frac{\ln(1+|x|)}{x-1}$

17 $y = \frac{x \operatorname{arcsen} x}{2^x - 2^{-x}}$

19 $y = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\operatorname{tg} x \sin x}$